F U N K C J E

Materiały pomocnicze dla studentów I roku farmacji i analityki medycznej

Opracował:
dr Krzysztof Kłaczkow

Drogi Czytelniku!

W Pracowni Matematycznej opracowane zostały materiały, które mogą Ci pomóc w powtórzeniu, usystematyzowaniu i ewentualnie uzupełnieniu Twojej wiedzy z tej części matematyki (na poziomie szkoły średniej), z której wiadomości są podstawą do pracy na zajęciach, prowadzonych przez naszą pracownię.

Opracowany zestaw podzielony jest na rozdziały. W każdym z nich na początku przypominamy najważniejsze definicje i twierdzenia. Dalej prezentujemy cykl zadań, z których bardzo wiele jest w pełni rozwiązanych (nazywamy je przykładami), część zaś wymaga samodzielnego rozwiązania przy użyciu przedstawionych w przykładach metod (nazywamy je ćwiczeniami). Do wszystkich ćwiczeń w końcowej części materiałów podane są odpowiedzi. Mamy nadzieję, że tak opracowany zestaw umożliwi Ci samodzielną pracę i ułatwi przyswojenie podanego materiału.

Autor pragnie w tym miejscu bardzo serdecznie podziękować dr. Jerzemu Chmajowi za cenne uwagi, których wykorzystanie pozwoliło znacznie ulepszyć proponowany zbiorek. Dziękuje także mgr. inż. Grzegorzowi Puckowi za pomoc w opracowywaniu i korekcie niektórych partii zadań.

Krzysztof Kłaczkow

1. Wartość bezwzględna

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej x nazywamy liczbę $|x|$, określoną następująco:

$$|x| = \begin{cases} x & gdy \quad x \geq 0 \\ -x & gdy \quad x < 0 \end{cases}.$$

Własności wartości bezwzględnej: Dla dowolnych liczb x, y∈R zachodzą związki:

(1) $|x| \geq 0$; (2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(3) $|-x| = |x|$; (4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0)$; (6) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(7) $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ponadto, jeśli a > 0, to:

(8) $|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$;

(9) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;

(10) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

(11) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$;

(12) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$.

Przykład 1.1. Doprowadzić do postaci nie zawierającej znaku wartości bezwzględnej wyrażenie:

a) $4 - x - |2 - 3x|$; b) $2|x + 4| - \sqrt{(x-2)^2}$.

Rozwiązanie.

a) Wyznaczamy miejsce zerowe wyrażenia pod wartością bezwzględną: 2 – 3x = 0 ⇔ x = $\frac{2}{3}$.

Dzieli ono oś liczbową na dwa przedziały: $(-\infty, \frac{2}{3}>$ oraz $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Rozpatrzymy dane wyrażenie w każdym z nich. Jeżeli x∈ $(-\infty, \frac{2}{3}>$, to 2 – 3x ≥ 0, więc $|2 - 3x| = 2 - 3x$, zatem $4 - x - |2 - 3x| = 4 - x - (2 - 3x) = 2(x + 1)$. Jeżeli zaś x∈ $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, to 2 – 3x < 0, czyli $|2 - 3x| = -(2 - 3x) = 3x - 2$, zatem $4 - x - |2 - 3x| = 4 - x - (3x - 2) = -2(2x - 3)$. Ostatecznie mamy więc:

$$4 - x - |2 - 3x| = \begin{cases} 2(x+1) & gdy \quad x \leq \frac{2}{3} \\ -2(2x-3) & gdy \quad x > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

b) Zauważamy, że: $2|x+4|-\sqrt{(x-2)^2} = 2|x+4|-|x-2|$ (własność (7)). Dalej, x + 4 = 0 ⇔ ⇔ x = - 4 oraz x – 2 = 0 ⇔ x = 2, tak więc oś liczbowa będzie teraz podzielona na trzy przedziały: (-∞, -4), <-4; 2) oraz <2, + ∞). Jeżeli x ∈ (-∞, -4), to x + 4 < 0 oraz x – 2 < 0 więc $|x+4| = -x-4$ i $|x-2| = -x+2$, zatem $2|x+4|-|x-2|$ = $2(-x-4)-(-x+2) = -(x+10)$.
Jeżeli x ∈ <-4, 2), to x + 4 ≥ 0 oraz x – 2 < 0, więc $|x+4| = x+4$ i $|x-2| = -x+2$, zatem $2|x+4|-|x-2|$ = $2(x+4)-(-x+2) = 3(x+2)$. Jeżeli zaś x ∈ <2, +∞ >, to x + 4 ≥ 0 oraz x – 2 ≥ 0 skąd $|x+4| = x+4$ i $|x-2| = x-2$, zatem $2|x+4|-|x-2|$ = $2(x+4)-(x-2) =$ $x+10$. Ostatecznie:

$$2|x+4|-\sqrt{(x-2)^2} = = \begin{cases} -(x+10) & gdy \quad x < -4 \\ 3(x+2) & gdy \quad -4 \le x < 2 \\ x+10 & gdy \quad x \ge 2 \end{cases}.$$

Przykład 1.2. Rozwiązać równanie lub nierówność:

a) $|2x+1| = 3$; b) $\sqrt{(3x-1)^2} \le 2$; c) $|1-3x| > 1$.

Rozwiązanie.
a) Na mocy własności (8) mamy: 2x + 1 = 3 ∨ 2x + 1 = -3, czyli x = 1 ∨ x = - 2.
b) Mamy kolejno: $\sqrt{(3x-1)^2} \le 2$ i $|3x-1| \le 2$. Korzystając z własności (10) otrzymujemy: -2 ≤ 3x – 1 ≤ 2, skąd $-\frac{1}{3} \le x \le 1$, czyli $x \in <\frac{1}{3}, 1>$.
c) Wobec własności (11) mamy: 1 – 3x < -1 ∨ 1 – 3x > 1 skąd x > $\frac{2}{3}$ ∨ x < 0. Tak więc: x ∈ $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

Przykład 1.3. Rozwiązać równanie lub nierówność:

a) $|x-3| = 2x$; b) $|x+5| < -x-1$; c) $|x+1|-|2-x| > x$.

Rozwiązanie.
a) Zauważmy, że równanie nie ma postaci, występującej we własności (8), bowiem po prawej jego stronie występuje wyrażenie zawierające zmienną x. Musimy więc rozwiązać je w przedziałach (wyznaczonych przez miejsce zerowe wyrażenia pod wartością bezwzględną). Mamy:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 3) \\ -x+3 = 2x \end{cases} \vee \begin{cases} x \in <3, +\infty) \\ x-3 = 2x \end{cases}, \text{ zatem: } \begin{cases} x \in (-\infty, 3) \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in <3, +\infty) \\ x = -3 \end{cases}.$$

Zauważamy, że pierwszy układ spełnia tylko liczba x = 1, a drugi jest sprzeczny. Tak więc alternatywę obu układów spełnia tylko liczba x = 1 i ona jest jedynym rozwiązaniem równania.
b) Rozważając odpowiednie przedziały mamy:

$$\begin{cases} x \in (-\infty,-5) \\ -x-5 < -x-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in <-5,+\infty) \\ x+5 < -x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty,-5) \\ -5 < -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in <-5,+\infty) \\ x < -3 \end{cases}.$$

Zauważmy, że druga nierówność w pierwszym układzie jest prawdziwa dla dowolnego x, zatem mamy dalej:

$$\begin{cases} x \in (-\infty,-5) \\ x \in R \end{cases} \vee \begin{cases} x \in <-5,+\infty) \\ x < -3 \end{cases}.$$

Pierwszy układ jest spełniony dla $x \in (-\infty,-5)$, drugi zaś dla $x \in <-5,-3)$. A więc ich alternatywa jest spełniona dla $x \in (-\infty,-5) \vee x \in <-5,-3)$, czyli dla $x \in (-\infty,-3)$.

c) Mamy:

$$\begin{cases} x \in (-\infty,-1) \\ -x-1-(2-x) > x \end{cases} \vee \begin{cases} x \in <-1; 2> \\ x+1-(2-x) > x \end{cases} \vee \begin{cases} x \in (2,+\infty) \\ x+1-(-2+x) > x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty,-1) \\ x < -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in <-1, 2> \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in (2,+\infty) \\ x < 3 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty,-3) \quad \vee \quad x \in (1; 2> \quad \vee \quad x \in (2; 3)$$

$$x \in (-\infty,-3) \cup (1; 3).$$

Przykład 1.4. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{|x+1|-2}$; b) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{|x|-4}$; c) $f(x) = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x-|2-x|}}$.

Rozwiązanie.

a) Z uwagi na pierwiastek stopnia drugiego musimy założyć, że $|x+1|-2 \ge 0$. Rozwiązując tę nierówność otrzymujemy: $|x+1| \ge 2$, skąd $x \le -3 \vee x \ge 1$, a więc $x \in (-\infty,-3> \cup <1,+\infty)$.

b) Z uwagi na pierwiastek musi być: $x \ge 0$, zaś z uwagi na mianownik: $|x|-4 \ne 0$. Zatem musi być spełniony układ:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ |x|-4 \ne 0 \end{cases}.$$

Aby rozwiązać drugi z warunków lepiej najpierw rozwiązać równanie: $|x|-4=0$, skąd $x=-4 \vee x=4$. Zatem $|x-4| \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -4 \wedge x \ne 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-4) \cup (-4,4) \cup (4,+\infty)$.

Dziedzinę funkcji określa więc układ:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \in (-\infty,-4) \cup (-4,4) \cup (4,+\infty) \end{cases},$$

skąd $x \in <0,4) \cup (4,+\infty)$.

c) Musi być spełniony układ:

$$\begin{cases} x - |2-x| \geq 0 \\ x - |2-x| \neq 0 \end{cases}.$$

Zauważmy, że układ ten jest równoważny warunkowi:

$$x - |2-x| > 0\,.$$

Rozwiązujemy ostatnią nierówność:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 2> \\ x - (2-x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in (2, +\infty) \\ x - (-2+x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 2> \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in (2, +\infty) \\ x \in R \end{cases}$$

$$x \in (1;\, 2> \quad \vee \quad x \in (2, +\infty)$$

$$x \in (1, +\infty)\,.$$

Ćwiczenia:

1.1 Doprowadzić do postaci nie zawierającej znaku wartości bezwzględnej wyrażenie:

a) $|x+1| - 2x + 3$, b) $x - |2-x|$, c) $|2x+1| + x - 4$, d) $|x-2| + |2x+3|$,

e) $|3x+2| - |x-4|$.

1.2. Rozwiązać równanie lub nierówność:

a) $|3x+1| = 4$, b) $|1-2x| = 1$, c) $|x+3| < 2$,

d) $|x-2| \geq 4$, e) $\sqrt{4 - 12x + 9x^2} - 2 > 0$.

1.3. Rozwiązać nierówność:

a) $|2x-1| < x$, b) $x + |2-x| \geq -2$, c) $|x+1| > x+1$,

d) $|x-1| - |3-x| > 1$, e) $|x+1| + |x+3| < \frac{1}{2}$.

1.4. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{|1-x| - 3}$, b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-|x|}}$, c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - |x-2|}}$,

d) $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{|x+2|}$, e) $f(x) = \sqrt{1 - |x| + |2-x|}$.

2. Funkcja liniowa

Funkcją liniową nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$f(x) = a \cdot x + b\,, \quad x \in R\,,$$

gdzie $a, b \in R$.

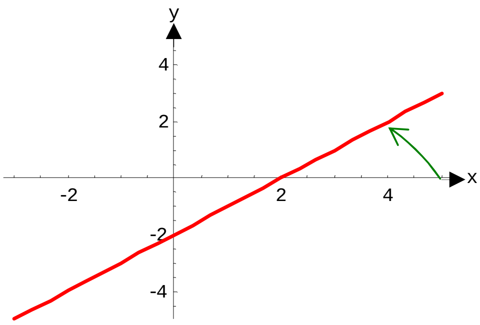
Niektóre własności funkcji liniowej:

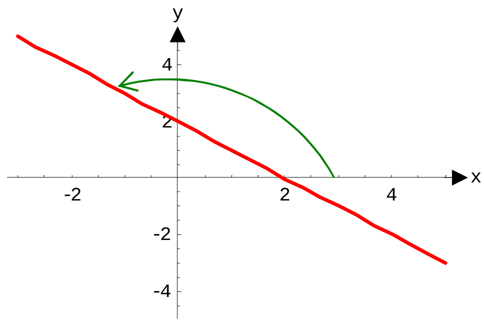
(1) Wykresem każdej funkcji liniowej jest linia prosta.

(2) Współczynnik a, występujący we wzorze funkcji liniowej, jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej, będącej wykresem tej funkcji, do osi OX:

$$a = tg\,\alpha$$

(odpowiedni kąt skierowany α został zaznaczony na poniższych rysunkach – na lewym rysunku jest to kąt ostry, a na prawym rozwarty).





(3) Jeżeli prosta k jest wykresem funkcji liniowej $f(x) = a_1 \cdot x + b_1$, zaś prosta m wykresem funkcji liniowej $g(x) = a_2 \cdot x + b_2$, to:

$$k \parallel l \iff a_1 = a_2,$$
$$k \perp l \iff a_1 \cdot a_2 = -1 \text{ (o ile } a_1, a_2 \neq 0\text{)}.$$

Przykład 2.1. Naszkicować wykres funkcji:

a) $f(x) = x - |x+3|$, b) $f(x) = |x+1| - |x-2|$.

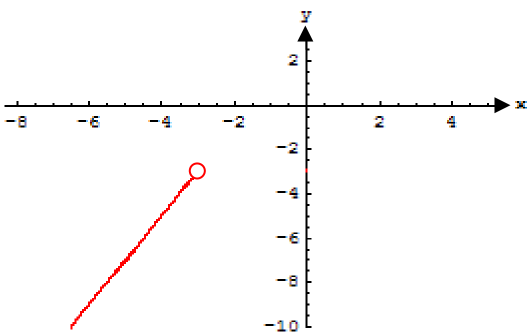
Rozwiązanie.

Funkcje z tego przykładu nie są co prawda liniowe, ale są liniowe przedziałami.

a) Wyznaczymy wzór funkcji w odpowiednich przedziałach:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -3) \\ f(x) = x - (-x-3) = 2x+3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -3, +\infty) \\ f(x) = x - (x+3) = -3 \end{cases}.$$

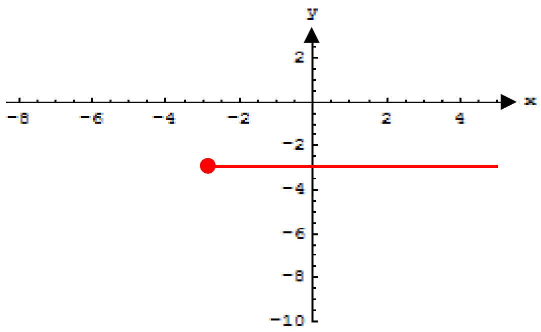
Z wykresu funkcji f(x) = 2x + 3 weźmiemy tę część, która odpowiada argumentom z przedziału $(-\infty, -3)$:



$f(x) = 2x + 3,\ x \in (-\infty, -3)$

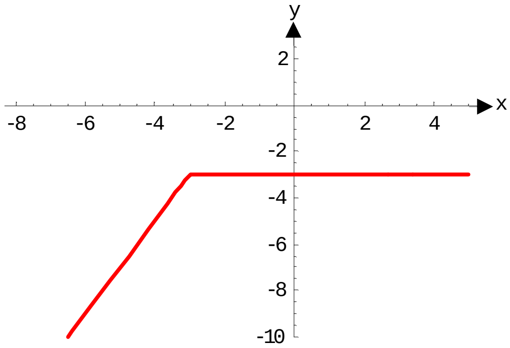
(nie zamalowane kółko w punkcie, będącym początkiem półprostej oznacza, że punkt ten nie jest zaliczany do wykresu).

Analogicznie z wykresu funkcji f(x) = -3 bierzemy część dla x ∈ < -3, +∞):



$f(x) = -3, x \in < -3, +\infty)$

(zamalowany punkt, będący początkiem półprostej, należy do wykresu).
Ostateczny wykres jest sumą wykresów z obydwu rysunków:

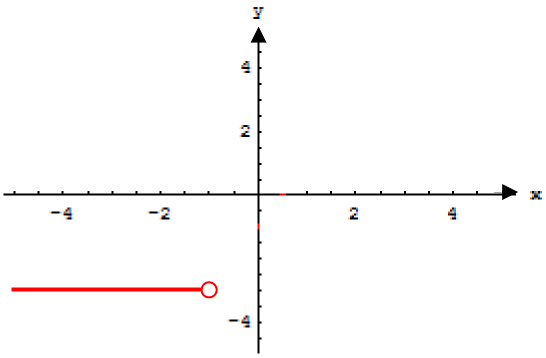


$f(x) = x - |x+3|$

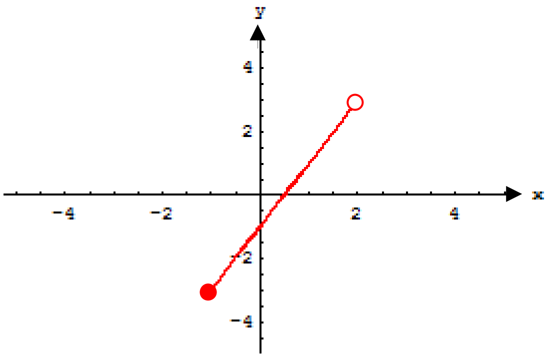
b) Mamy:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ f(x) = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in < -1; 2) \\ f(x) = 2x - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in < 2, +\infty) \\ f(x) = 3 \end{cases}.$$

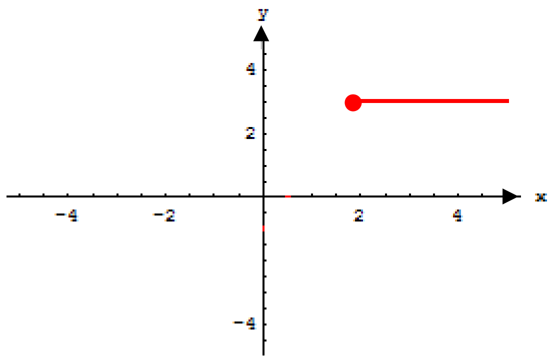
Zatem cząstkowe wykresy będą następujące:



$f(x) = -3, x \in (-\infty, -1)$

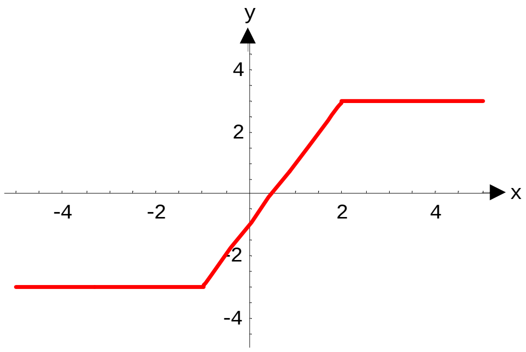


$f(x) = 2x - 1, x \in < -1, 2)$



$f(x)=3, x\in<2,+\infty)$

skąd otrzymujemy wykres ostateczny:



$f(x)=|x-1|-|x-2|$

Ćwiczenia:
2.1. Naszkicować wykres funkcji:

a) $f(x)=|x-1|-x$, b) $f(x)=x+1-|x+1|$, c) $f(x)=2x-|1-x|$,
d) $f(x)=|x+2|-|x-1|$, e) $f(x)=|1-x|+|3-x|-3$.

2.2. Na podstawie wykresu funkcji f odczytać zbiór jej argumentów, dla których spełniona jest podana nierówność:

a) $f(x)\le 1$, gdzie $f(x)=|x+1|-2x$; b) $f(x)>-2$, gdzie $f(x)=|2-x|-x$;
c) $f(x)>2$, gdzie $f(x)=|x|-|x-4|$; d) $|f(x)|>4$, gdzie $f(x)=|x+2|+|2-x|$.

3. Funkcja kwadratowa

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję, określoną wzorem:
$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ x\in R,$$
gdzie $a,b,c\in R$ i $a\ne 0$.

Wyrażenie $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ ($a\ne 0$) nazywamy trójmianem kwadratowym.
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

Postaci trójmianu kwadratowego:
a) postać ogólna:

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

b) postać kanoniczna:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \quad p = -\frac{b}{2a}, \; q = -\frac{\Delta}{4a},$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$ (liczba Δ nazywana jest wyróżnikiem trójmianu kwadratowego).
Liczby p oraz q są współrzędnymi wierzchołka W paraboli: W(p, q);
c) postać iloczynowa: gdy $\Delta \geq 0$, to

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2),$$

gdzie $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

W przypadku, gdy $\Delta < 0$ postać iloczynowa nie istnieje i funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (w zbiorze liczb rzeczywistych).

Przykład 3.1. Sprowadzić do postaci kanonicznej i iloczynowej (o ile istnieje) trójmian:

$$f(x) = -3x^2 - 3x + 6.$$

Rozwiązanie.
Mamy:

$-3x^2 - 3x + 6 = -3(x^2 + x - 2) =$ (wyłączenie współczynnika a = -3 przed nawias)

$= -3\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] =$ (zastosowanie wzoru skróconego mnożenia)

$= -3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$

Otrzymaliśmy postać kanoniczną: $f(x) = -3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$. (Jak łatwo sprawdzić, ten sam wynik otrzymamy obliczając Δ, p i q oraz stosując podany wyżej wzór na postać kanoniczną).

Dalej, ponieważ $\Delta \geq 0$, więc istnieje postać iloczynowa tego trójmianu. Mamy: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, więc $f(x) = -3(x+2)(x-1)$.

Przykład 3.2. Naszkicować wykres funkcji:

a) $f(x) = 1 - |x^2 + 3x|$, b) $f(x) = (x+2)\cdot|x-3|$.

Rozwiązanie.
a) Naszkicujemy najpierw wykres funkcji i(x) = x^2 + 3x (rysunek a), a następie kolejno wykresy funkcji: h(x) = $|x^2 + 3x|$ (rysunek b), g(x) = $-|x^2 + 3x|$ (rysunek c) oraz f(x) =$1-|x^2 + 3x|$ = = $-|x^2 + 3x| + 1$ (rysunek d).

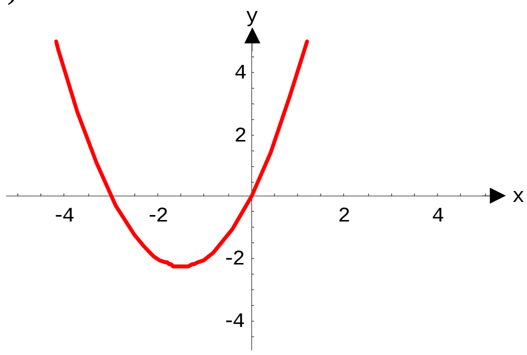
Korzystamy przy tym z następujących faktów:

1) aby z wykresu funkcji F(x) otrzymać wykres funkcji |F(x)| należy:
- te części wykresu funkcji F(x), które leżą ponad osią OX lub na niej pozostawić bez zmian,
- części wykresu leżące poniżej osi OX przekształcić przez symetrię względem tej osi;

2) aby z wykresu funkcji F(x) otrzymać wykres funkcji –F(x) należy przekształcić wykres funkcji F(x) przez symetrię względem osi OX;

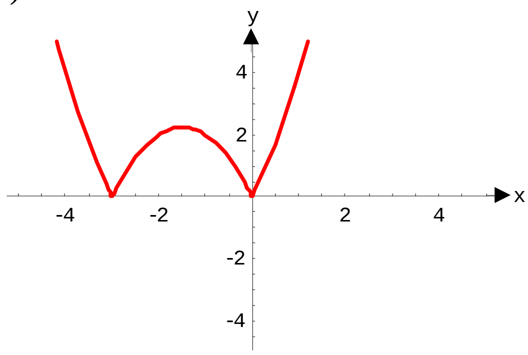
3) aby z wykresu funkcji F(x) otrzymać wykres funkcji F(x) + a ($a \in R$) należy przesunąć wykres funkcji F(x) o wektor $\vec{p} = [0, a]$ (w tym wypadku $\vec{p} = [0, 1]$).

a)



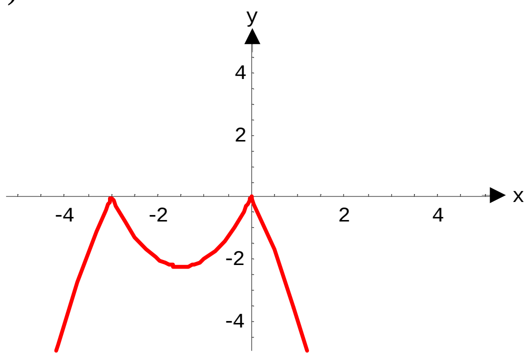
$i(x) = x^2 + 3x$

b)



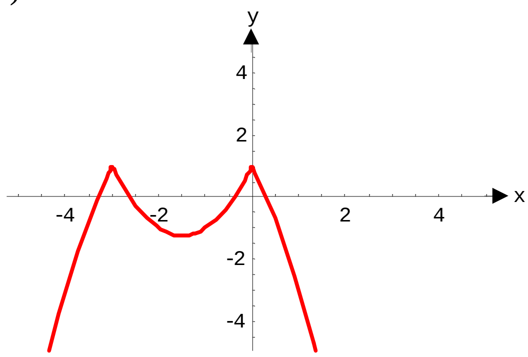
$h(x) = \left|x^2 + 3x\right|$

c)



$g(x) = -\left|x^2 + 3x\right|$

d)

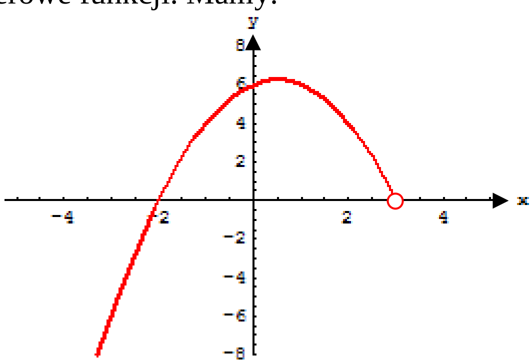


$f(x) = 1 - \left|x^2 + 3x\right|$

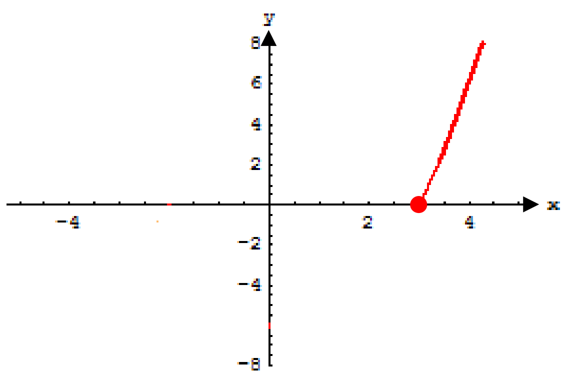
b) Mamy:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 3) \\ f(x) = (x+2)(-x+3) = -(x+2)(x-3) \end{cases} \vee \begin{cases} x \in <3, +\infty) \\ f(x) = (x+2)(x-3) \end{cases}.$$

Zauważmy, że nie warto likwidować postaci iloczynowej, gdyż z niej łatwo odczytać miejsca zerowe funkcji. Mamy:

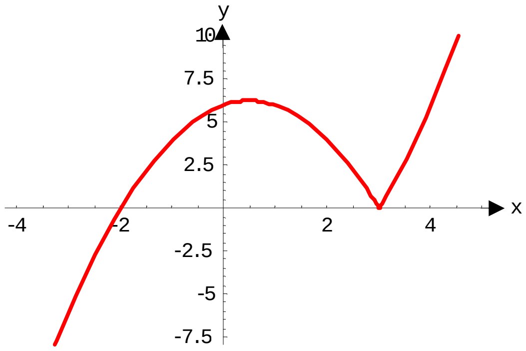


$f(x) = -(x+2)(x-3), x \in (-\infty, 3)$



$f(x) = (x+2)(x-3), x \in <3, +\infty)$

i, ostatecznie,



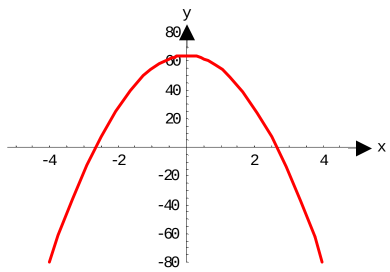
$$f(x) = (x+2)\cdot|x-3|.$$

Przykład 3.3. Rozwiązać nierówność:

a) $64 - 9x^2 < 0$ b) $4x^2 - 12x \le 0$, c) $12 - 9x - 3x^2 \ge 0$, d) $4x^2 + 12x + 9 > 0$.

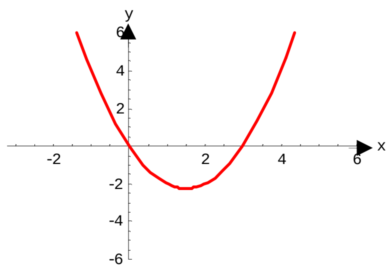
Rozwiązanie.

a) Ze wzorów skróconego mnożenia: $(8-3x)(8+3x) < 0$. Z wykresu funkcji $f(x) = (8-3x)(8+3x)$:



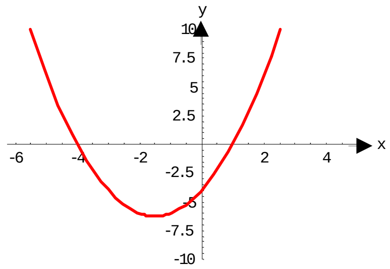
(której miejscami zerowymi są $x_1 = -\frac{8}{3}$ oraz $x_2 = \frac{8}{3}$) odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in \left(-\infty, -\frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$.

b) Po podzieleniu obu stron nierówności przez 4 i wyłączeniu x przed nawias mamy: $x(x-3) \le 0$. Z wykresu



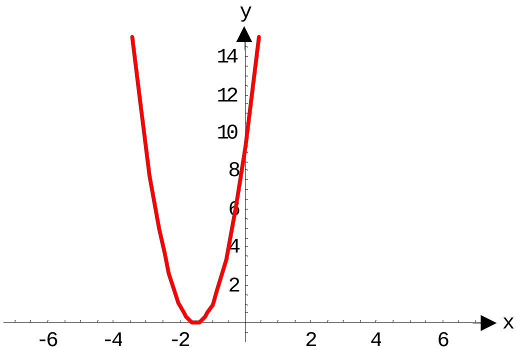
odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in < 0; 3 >$.

c) Przekształcamy nierówność do postaci: $x^2 + 3x - 4 \le 0$. Z wykresu:



otrzymujemy: $x \in < -4; 1 >$.

d) Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia mamy: $(2x+3)^2 > 0$.
Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = (2x+3)^2$



zauważamy, że funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich $x \in R$ z wyjątkiem $x = -\frac{3}{2}$, a więc otrzymujemy ostatecznie: $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ (lub, równoważnie, $x \in R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$).

Przykład 3.4. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x - x^2}}$, b) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$, c) $f(x) = \sqrt{2 - |x|} + \frac{1-x}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$.

Rozwiązanie.
a) Musi być: $3x - x^2 > 0$, skąd $x \in (0; 3)$.
b) Musi być spełniony układ:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy go:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq -2 \wedge x \neq 2 \end{cases}$$

$$x \in < 1; 2) \cup (2, +\infty).$$

c) Mamy:

$$\begin{cases} 2-|x|\geq 0 \\ x^2+x-2>0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x\in <-2, 2> \\ x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty) \end{cases}, \text{ skąd } x\in(1; 2>.$$

Ćwiczenia:

3.1. Sprowadzić do postaci kanonicznej i iloczynowej (o ile istnieje) trójmian:

a) $f(x)=x-x^2$, b) $f(x)=2x^2+5x-3$, c) $f(x)=4x^2+4x+1$,

d) $f(x)=-x^2-2x-2$, e) $f(x)=3-x^2-2x$.

3.2. Naszkicować wykres funkcji:

a) $f(x)=x^2-2x-3$, b) $f(x)=8+2x-x^2$, c) $f(x)=x\cdot|x-1|$,

d) $f(x)=|2x^2+x-1|$, e) $f(x)=x^2-4|x|+3$.

3.3. Rozwiązać nierówność:

a) $10x-5x^2\leq 0$, b) $64x^2-81<0$, c) $3x^2+2x-1>0$,

d) $4x-x^2-4\geq 0$, e) $x^2+9>6x$.

3.4. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-x^2}$, b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+7}$, c) $f(x)=\sqrt{x^2+x}+\sqrt{-x^2-x}$,

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-2}}{|x-1|}$, e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-2}}{\sqrt{x^2-6x+8}}$.

4. Wielomiany

Wielomianem stopnia n ($n\in N$) zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję, określoną wzorem:

$$W(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+...+a_1\cdot x+a_0,\ x\in R,$$

gdzie $a_0,a_1,...,a_n\in R$ i $a_n\neq 0$.

Liczby $a_0,a_1,...,a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu.

Wielomian nazywamy zerowym, jeśli $W(x)=0$ dla każdego $x\in R$.

Podstawowe własności wielomianów:

a) działania na wielomianach

Na wielomianach można wykonywać działania (tak, jak na funkcjach): dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia (przez wielomian niezerowy).

Jeżeli $W(x)$ nie jest wielomianem zerowym, to wielomian $P(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez niezerowy wielomian $Q(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$W(x)=P(x)\cdot Q(x).$$

Mówimy, że wielomian niezerowy $W(x)$ daje przy dzieleniu przez niezerowy wielomian $Q(x)$ iloraz $P(x)$ oraz resztę $R(x)$, jeśli:

$$W(x)=P(x)\cdot Q(x)+R(x).$$

Jeżeli wielomian niezerowy $W(x)$ daje przy dzieleniu przez niezerowy wielomian(stopnia k) $Q(x)$ iloraz $P(x)$ oraz resztę $R(x)$, to stopień reszty jest mniejszy lub równy od k – 1.

b) równość wielomianów

Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

c) pierwiastek wielomianu, pierwiastek k-krotny wielomianu

Liczbę x_0 nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, jeśli $W(x_0) = 0$.

Mówimy, że x_0 jest k-krotnym ($k \in N^+$) pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, jeżeli $W(x)$ jest podzielny (bez reszty) przez $(x - x_0)^k$, a nie jest podzielny (bez reszty) przez $(x - x_0)^{k+1}$. Liczbę k nazywamy krotnością pierwiastka x_0 wielomianu.

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(x)$ jest podzielny (bez reszty) przez dwumian $x - x_0$ (twierdzenie Bezout).

Jeżeli wielomian

$$W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + ... + a_1 \cdot x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, ..., a_n \in C$ ma pierwiastek wymierny $x_0 = \dfrac{p}{q}$, $(p, q \in C, q \neq 0)$, to p jest podzielnikiem współczynnika a_0, zaś q jest podzielnikiem współczynnika a_n (twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych).

W szczególności, jeśli $a_n = 1$ i wielomian (o współczynnikach całkowitych) ma pierwiastek wymierny, to jest nim podzielnik współczynnika a_0.

d) rozkład wielomianu na czynniki

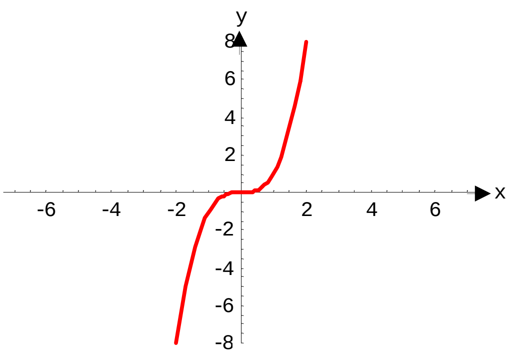
Każdy wielomian niezerowy da się w jeden tylko sposób rozłożyć na czynniki, które są albo liniowe (tzn. są postaci ax + b), albo są trójmianami kwadratowymi postaci ax^2 + bx +c takimi, że $\Delta < 0$.

Najczęściej stosowane metody rozkładania wielomianu na czynniki:

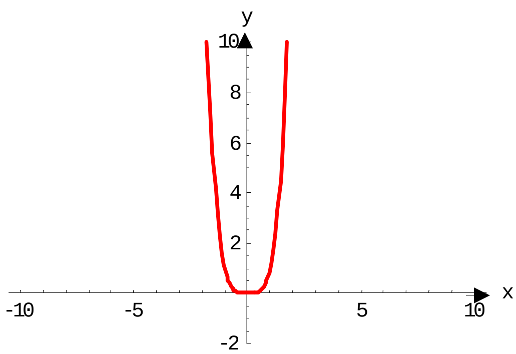
1. wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia,
2. wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,
3. grupowanie wyrazów i wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,
4. wykorzystanie twierdzenia Bezout.

e) wykresy niektórych wielomianów

Oto wykresy niektórych wielomianów:



$f(x) = x^3$



$f(x) = x^4$

Przykład 4.1. Wyznaczyć P(x) + Q(x), P(x) – Q(x), P(x)·Q(x) oraz P(x):Q(x), jeśli:

P(x) = $x^5 + 4x^3 + x^2 + 4x + 2$, Q(x) = $x^2 + 2$.

Rozwiązanie. Mamy:
P(x) + Q(x) = $x^5+4x^3+x^2+4x+2\ +\ x^2+2\ =\ x^5+4x^3+2x^2+4x+4$,
P(x) - Q(x) = $x^5+4x^3+x^2+4x+2\ -\left(x^2+2\right)=\ x^5+4x^3+4x$,
P(x) · Q(x) = $\left(x^5+4x^3+x^2+4x+2\right)\cdot\left(x^2+2\right)=$
$x^7+2x^5+4x^5+8x^3+x^4+2x^2+4x^3+8x+2x^2+4\ =$
$x^7+6x^5+x^4+12x^3+4x^2+4x^3+8x+4$
(w ostatnim działaniu mnożyliśmy każdy wyraz pierwszego nawiasu przez każdy wyraz drugiego nawiasu, a potem dokonaliśmy redukcji wyrazów podobnych).
Aby obliczyć iloraz P(x) : Q(x) możemy posłużyć się algorytmem pisemnego dzielenia wielomianów. Po lewej stronie pionowej kreski będziemy obliczali iloraz, zaś po jej prawej stronie wyjaśniali poszczególne kroki:

$(x^5 + 4x^3 + x^2 + 4x + 2)\ :\ (x^2 + 2) = x^3 + 2x + 1$	$x^5 : x^2 = x^3$
$-x^5\ \ - 2x^3$	$x^3\cdot(x^2 + 2) = x^5 + 2x^3$
----------------------------	$- x^3\cdot(x^2 + 2) = -x^5 - 2x^3$
$2x^3 + x^2\ + 4x + 2$	------------------------------
	$2x^3 : x^2 = 2x$
$-2x^3\qquad - 4x$	$2x\cdot (x^2 + 2) = 2x^3 + 4x$
----------------------------	$-2x\cdot (x^2 + 2) = -2x^3 - 4x$
$x^2\qquad + 2$	------------------------------
	$x^2 : x^2 = 1$
$-x^2\qquad - 2$	$1\cdot(x^2 + 2) = x^2 + 2$
-------------------------	$-1\cdot(x^2 + 2) = -x^2 - 2$
$=\qquad =$	

Zatem P(x) : Q(x) = $x^3 + 2x + 1$ (wielomiany podzieliły się bez reszty).

Przykład 4.2. Wykonać dzielenie W(x) : P(x) (z resztą R(x)), jeśli:

$$W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 3,\ \ P(x) = x^3 + 1.$$

Przedstawić wielomian W(x) w postaci W(x) = P(x)· Q(x) + R(x), gdzie Q(x) i R(x) są odpowiednio: obliczonym ilorazem i obliczoną resztą.

Rozwiązanie. Wykorzystamy znów podany algorytm dzielenia pisemnego wielomianów:

$(x^4 - 2x^3 + 3x - 3)\qquad :\ \ (x^3 + 1)\ \ = x - 2$
$-x^4\qquad - x$

$=\ -2x^3 + 2x\ - 3$
$2x^3\qquad +2$
----
reszta $\longrightarrow$ $+2x - 1$

Pod ostatnią kreską mamy już wyrażenie stopnia pierwszego, nie można zatem wykonywać dalszego dzielenia przez wielomian stopnia trzeciego. Wyrażenie pod kreską jest zatem resztą. Mamy więc:

$$R(x) = 2x - 1,\quad Q(x) = x - 2\qquad i\quad W(x) = (x^3 + 1)\cdot(x - 2) + (2x - 1).$$

Przykład 4.3. Wyznaczyć stałe a i b tak, by zachodziła równość:

$$W(x) = Q(x)\cdot P(x) - S(x),$$

jeśli: $W(x) = 2x^5 + 4x^3 - x^2 - 1$, $Q(x) = 2x^3 + 1$, $P(x) = x^2 + 2$, $S(x) = ax^2 + b$.

Rozwiązanie.
Wyznaczmy najpierw wielomian po prawej stronie:

$$Q(x)\cdot P(x) - S(x) = (2x^3 + 1)(x^2 + 2) - (ax^2 + b) = 2x^5 + x^2 + 4x^3 + 2 - ax^2 - b =$$
$$2x^5 + 4x^3 + (1 - a)x^2 + 2 - b.$$

Musi więc zachodzić równość:

$$2x^5 + 4x^3 + (1 - a)x^2 + 2 - b = 2x^5 + 4x^3 - x^2 - 1.$$

Stopnie wielomianów po obu stronach ostatniej równości są równe, muszą więc być równe odpowiednie współczynniki, skąd wynika, że musi być:

$$\begin{cases} 1 - a = -1 \\ 2 - b = -1 \end{cases},$$

co zachodzi dla $a = 2$ oraz $b = 3$.

Przykład 4.4. Które z liczb: -3, -2, -1, 1, 2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - 3x - 2$?

Rozwiązanie. Obliczmy kolejno wartości wielomianu dla każdej z podanych liczb:
$W(-3) = (-3)^3 - 3(-3) - 2 = -20 \neq 0$, $W(-2) = -8 + 6 - 2 = -4 \neq 0$, $W(-1) = -1 + 3 - 2 = 0$, $W(1) = 1 - 3 - 2 = -4 \neq 0$, $W(2) = 8 - 6 - 2 = 0$.
Zatem z podanych liczb tylko liczby -1 oraz 2 są pierwiastkami wielomianu W(x).

Przykład 4.5. Wyznaczyć wymierne pierwiastki wielomianu:
a) $W(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$, b) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Rozwiązanie.
a) Wielomian ma współczynniki całkowite, ponadto współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1, zatem, jeżeli wielomian ten ma pierwiastki wymierne, to są one liczbami całkowitymi, będącymi podzielnikami współczynnika -3. Może to więc być tylko któraś z liczb: -3, -1, 1, 3. Sprawdzamy kolejno, która z nich ewentualnie jest pierwiastkiem danego wielomianu:

$$W(-3) = 0, \quad W(-1) = 0, \quad W(1) = 0, \quad W(3) \neq 0,$$

zatem wymiernymi (dokładniej: całkowitymi) pierwiastkami wielomianu W(x) są liczby:

$$x_1 = -3, \; x_2 = -1 \text{ oraz } x_3 = 1.$$

b) Ten wielomian ma również współczynniki całkowite, ale w tym wypadku wymierne pierwiastki mogą być liczbami postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest podzielnikiem współczynnika 1, zaś q jest podzielnikiem współczynnika 2. Zatem:

$$p \in \{-1, 1\}, \quad q \in \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Wynika stąd, że $\frac{p}{q} \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Sprawdzamy, który z elementów ostatniego zbioru jest pierwiastkiem W(x):

$$W(-1) \neq 0, \; W\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \; W\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0, \; W(1) = 0.$$

Tak więc wymiernymi pierwiastkami tego wielomianu są liczby: $x_1 = -\frac{1}{2}$ oraz $x_2 = 1$.

Przykład 4.6. Rozłożyć na czynniki wielomian:
a) $W(x) = 8x - x^4$, b) $W(x) = x^4 - 3x^2 - 4$, c) $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$.

Rozwiązanie.
a) Zastosujemy metodę wyłączenia wspólnego czynnika przed nawias, a następnie wykorzystamy wzory skróconego mnożenia (różnica sześcianów):

$$8x - x^4 = x(8 - x^3) = x(2 - x)(4 + 2x + x^2).$$

Wyróżnik trójmianu w ostatnim nawiasie jest ujemny, więc trójmian ten nie da się rozłożyć na czynniki (nie istnieje bowiem jego postać iloczynowa). Powyższy rozkład jest więc ostateczny. Zatem $W(x) = x(2 - x)\,(4 + 2x + x^2)$.
b) Teraz skorzystamy z metody grupowania i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias. Zwykle lepiej jest, gdy składników jest parzysta ilość. Aby to uzyskać, często warto jeden ze składników przedstawić w postaci sumy lub różnicy dwu składników. Możemy zrobić to następująco:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = x^4 - 4x^2 + x^2 - 4.$$

Widać, że po wyłączeniu z pierwszych dwu wyrazów x^2 przed nawias otrzymamy wspólny czynnik $x^2 - 4$ (podkreśliliśmy go niżej), który będzie można jeszcze raz wyłączyć przed nawias, a następnie wykorzystać wzór skróconego mnożenia (różnica kwadratów):

$$x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = x^2\underline{(x^2 - 4)} + \underline{x^2 - 4} = \underline{(x^2 - 4)}\,(x^2 + 1) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 1).$$

Tak więc $W(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$.
c) Tutaj trudniej jest użyć metody grupowania. Możemy wykorzystać twierdzenie Bezout. Potrzebny jest nam jednak wcześniej przynajmniej jeden pierwiastek wielomianu. Spróbujmy poszukać go wśród pierwiastków wymiernych. Musi on być postaci $\frac{p}{q}$, gdzie

$$p \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\},\ \ q \in \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Zatem $\frac{p}{q} \in \left\{-6,-3,-2,-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,3,6\right\}$. Sprawdzimy, czy któraś z liczb tego zbioru jest pierwiastkiem W(x), zaczynając od liczb, dla których obliczenia są najprostsze:
$W(1) = \neq 0$, $W(-1) = 0$.
Ponieważ $x = -1$ jest pierwiastkiem wielomianu, więc na mocy twierdzenia Bezout wielomian W(x) jest podzielny bez reszty przez $(x + 1)$. Po wykonaniu tego dzielenia i przedstawieniu otrzymanego trójmianu w postaci iloczynowej mamy:

$$W(x) = (x + 1)(2x^2 - 7x + 6) = 2\cdot(x + 1)(x - 2)\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

Przykład 4.7. Rozwiązać równanie lub nierówność:
a) $2x^3 + 3x^2 = 1$, b) $7x - 4x^3 \le 3$.

Rozwiązanie.
a) Po przekształceniu równania do postaci $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ i rozłożeniu wielomianu po lewej stronie na czynniki mamy: $2(x + 1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$. Czyli musi być: $x + 1 = 0$ lub $x-\frac{1}{2}=0$, skąd $x = -1$ lub $x=\frac{1}{2}$.

b) Postępując analogicznie jak w a) otrzymujemy: $4(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right) \geq 0$, skąd, po podzieleniu obu stron przez 4, mamy: $(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right) \geq 0$.

Aby rozwiązać ostatnią nierówność wyznaczymy najpierw miejsca zerowe wielomianu po lewej stronie: x = 1 lub $x=\frac{1}{2}$ lub $x=-\frac{4}{3}$. Dzielą one oś liczbową na przedziały, zbadamy znak każdego z czynników wielomianu w każdym z przedziałów (w specjalnej tabelce), a w dolnym wierszu tabelki określimy znak całej lewej strony nierówności (metoda ta nosi nazwę „siatki znaków"):

x	$\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$	$-\frac{4}{3}$	$\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	1	$(1,+\infty)$
x - 1	-	-	-	-	-	0	+
$x-\frac{1}{2}$	-	-	-	0	+	+	+
$x+\frac{4}{3}$	-	0	+	+	+	+	+
W(x)	-	0	+	0	-	0	+

Na podstawie analizy ostatniego wiersza dochodzimy do wniosku, że W(x) przyjmuje wartości większe lub równe od zera dla x∈ $\left\langle -\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right\rangle \cup <1,+\infty)$.

Ćwiczenia:

4.1. Wykonać dzielenie wielomianów:
a) $(x^3-3x+2):(x^2+x-2)$, b) $(x^3+3x^2+5x+3):(x^2+2x+3)$.
Zapisać dzielną w postaci iloczynu dzielnika i ilorazu.

4.2. Wyznaczyć P(x) + Q(x), P(x) – Q(x), P(x)·Q(x) oraz P(x):Q(x), jeśli:
a) $P(x)=x^3+x^2-x+2$, $Q(x)=x+2$;
b) $P(x)=x^3-2x^2+x+4$, $Q(x)=x^2-3x+4$.

4.3. Wykonać dzielenie W(x) : P(x) (z resztą R(x)), jeśli:
a) $W(x)=x^4-x^3+x+1$, $P(x)=x^3+1$, b) $W(x)=x^4-x^3-x^2-x+3$, $P(x)=x^2+x$.
Przedstawić wielomian W(x) w postaci W(x) = P(x)· Q(x) + R(x), gdzie Q(x) i R(x) są odpowiednio: obliczonym ilorazem i obliczoną resztą.

4.4. Wyznaczyć a i b tak, by zachodziła równość W(x) = P(x)· Q(x), jeśli:
a) $W(x)=2x^3-3x^2+2x-3$, $P(x)=x^2+1$, $Q(x)=ax+b$,
b) $W(x)=3x^3-x^2-15x+5$, $P(x)=x^2-5$, $Q(x)=ax+b$,
c) $W(x)=x^5-x^3+x^2-1$, $P(x)=x^3+1$, $Q(x)=ax^2+b$,
d) $W(x)=x^5+2x^3-x^2-2$, $P(x)=ax^3+b$, $Q(x)=x^2+2$.

4.5. Sprawdzić, która z liczb: r_1 lub r_2 jest pierwiastkiem wielomianu W(x), jeśli:
a) $W(x)=x^3+x^2-5x+3$, $r_1=1$, $r_2=-3$;
b) $W(x)=x^4-x^2-2$, $r_1=-\sqrt{2}$, $r_2=-1$;
c) $W(x)=x^4-x^2-20$, $r_1=\sqrt{6}$ $r_2=\sqrt{5}$.

4.6. Wykazać, że liczba r jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu W(x) (tzn., że W(x) jest podzielny bez reszty przez $(x – r)^2$, a nie jest podzielny bez reszty przez $(x – r)^3$), jeśli:

a) $W(x) = x^4 – 2x^3 + 2x^2 – 2x + 1$, r = 1; b) $W(x) = x^4 – 4x^3 – 6x^2 + 4x + 5$, r = -1.

4.7. Wyznaczyć wymierne pierwiastki wielomianu:

a) $W(x) = x^3 – 2x^2 – x + 2$, b) $W(x) = x^3 – x^2 – 4x + 4$,
c) $W(x) = 3x^5 – x^4 + 6x – 2$, d) $W(x) = 3x^4 – x^3 + x^2 – x – 2$.

4.8. Rozłożyć na czynniki wielomian:

a) $W(x) = x^4 – x$, b) $W(x) = x^5 + x^2$,
c) $W(x) = 8x^4 + 27x$, d) $W(x) = 8x – 27x^4$.

4.9. Rozłożyć na czynniki wielomian:

a) $W(x) = x^4 – 5x^2 + 4$, b) $W(x) = x^4 – 10x^2 + 9$,
c) $W(x) = x^4 – 8x^2 – 9$, d) $W(x) = 2 – x^2 – x^4$.

4.10. Rozłożyć na czynniki wielomian:

a) $W(x) = x^3 – 2x^2 – 4x + 8$, b) $W(x) = x^3 – x^2 – x +1$,
c) $W(x) = x^3 – 2x^2 + 2x – 4$, d) $W(x) = x^3 – 3x^2 + 3x – 9$.

4.11. Rozłożyć na czynniki wielomian:

a) $W(x) = 3x^3 – 2x^2 – 1$, b) $W(x) = x^3 + x^2 + 4$,
c) $W(x) = x^4 – 11x^2 - 20x$, d) $W(x) = 3x^4 – 17x^2 + 30x$.

4.12. Rozwiązać równanie:

a) $x^3 – 2x^2 – 3x + 6 = 0$, b) $x^3 – 3x – 2 = 0$, c) $2x^3 + x^2 + 6x + 3 = 0$,
d) $x^4 – 2x^2 + 1 = 0$, e) $27x – 8x^4 = 0$.

4.13. Rozwiązać nierówność:

a) $x^3 – 3x^2 – 16x + 48 > 0$, b) $x^3 + x^2 – 7x – 7 < 0$,
c) $x^4 – 4x^2 \geq 0$, d) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3 \leq 0$,
e) $8x^5 + x^2 > 0$.

5. Funkcja wymierna

Funkcją wymierną nazywamy funkcję, będącą ilorazem dwu wielomianów W_1 i W_2 tej samej zmiennej, to znaczy funkcję określoną wzorem:

$$f(x) = \frac{W_1(x)}{W_2(x)}, \; x \in \{x \in R : W_2(x) \neq 0\}.$$

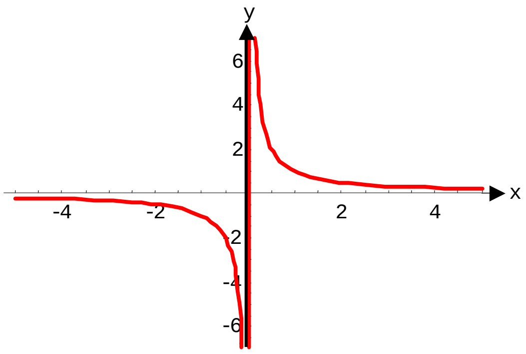
Szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej jest funkcja homograficzna, tzn. funkcja określona wzorem

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}, \quad x \in R - \left\{-\frac{d}{c}\right\},$$

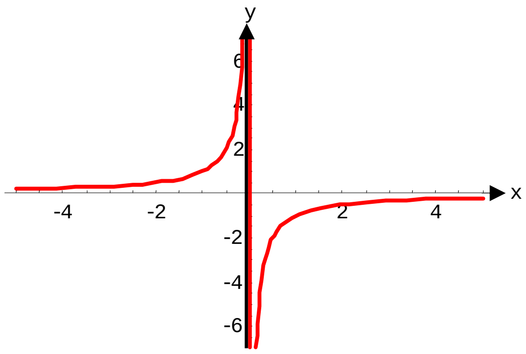
gdzie $a, b, c, d \in R$; $c \neq 0$ i $f(x)$ nie jest funkcją stałą.

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

Oto przykłady wykresów dwu funkcji homograficznych:



$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

Analizując wykres po lewej stronie można zauważyć, że:
1) gdy argumenty x przyjmują coraz większe wartości dodatnie, to wartości funkcji są coraz bliższe zeru. Podobnie, jeśli argumenty przyjmują coraz mniejsze wartości ujemne, to również wartości funkcji są coraz bliższe zeru. Powiemy, że

prosta o równaniu y = 0 jest asymptotą poziomą (obustronną) wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

2) gdy argumenty są coraz bliższe zeru, ale ujemne, to wartości funkcji są coraz mniejszymi liczbami ujemnymi. Natomiast gdy argumenty są coraz bliższe zeru, ale dodatnie, to wartości funkcji są coraz większymi liczbami dodatnimi. Powiemy, że:

prosta o równaniu x = 0 jest asymptotą pionową (obustronną) wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Gdy teraz przyjrzeć się wykresowi po prawej stronie, to łatwo stwierdzić, że:

prosta o równaniu y = 0 jest asymptotą poziomą (obustronną) wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{x}$

prosta o równaniu x = 0 jest asymptotą pionową (obustronną) wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Można udowodnić, że w ogólnym przypadku równania asymptot wykresu funkcji $f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$ mają postać:

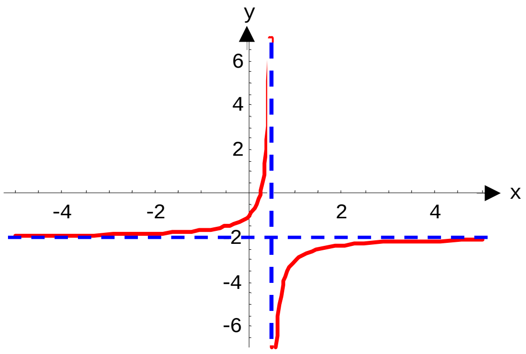
asymptota pozioma: $y = \frac{a}{c}$,

asymptota pionowa: $x = -\frac{d}{c}$.

Na przykład równania asymptot wykresu funkcji $f(x) = \frac{1-4x}{2x-1}$ (wykres poniżej) mają postać:

asymptota pozioma: y = - 2, asymptota pionowa: x = $\frac{1}{2}$

(bowiem $f(x) = \frac{1-4x}{2x-1}$ = $\frac{-4x+1}{2x-1}$, skąd a = - 4, b = 1, c = 2 oraz d = - 1).



$$f(x) = \frac{1-4x}{2x-1}$$

Przykład 5.1. Rozwiązać równanie lub nierówność:

a) $\dfrac{2x+3}{3x+1} = 4$, b) $\dfrac{1}{x^2-3x+2} - \dfrac{1}{x^2-x-2} = 1$,

c) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} \geq 1$, d) $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| \leq 2$.

Rozwiązanie.

a) Przy założeniu $x \neq -\frac{1}{3}$ możemy obie strony równania pomnożyć przez mianownik (gdyż jest on różny od zera) otrzymując: 2x + 3 = 4(3x + 1), skąd $x = -\frac{1}{10}$. Na koniec sprawdzamy, czy otrzymane rozwiązanie spełnia założenie. Ponieważ tak jest, więc: $x = -\frac{1}{10}$.

b) Zakładamy, że: $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \ \wedge \ x^2 - x - 2 \neq 0$. Rozwiążmy te nierówności. Ponieważ $x^2 - 3x + 2 = 0 \ \Leftrightarrow x = 1 \vee \ x = 2$, zaś $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee \ x = 2$, więc $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \ \wedge \ x^2 - x - 2 \neq 0 \ \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge \ x \neq 1 \wedge x \neq 2$. Zatem ostatecznym założeniem jest:

$$x \neq -1 \wedge \ x \neq 1 \wedge x \neq 2.$$

Korzystając z postaci iloczynowych trójmianów w mianownikach mamy:

$\dfrac{1}{x^2-3x+2} - \dfrac{1}{x^2-x-2} = 1$, czyli $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} - \dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = 1$, skąd

$\dfrac{2}{(x-1)(x+1)(x-2)} = 1$. Zatem musi być $(x-1)(x+1)(x-2) = 2$, czyli $x^3 - 2x^2 - x = 0$, skąd $x = 0 \vee x = 1-\sqrt{2} \ \vee \ x = 1+\sqrt{2}$. Wszystkie trzy liczby spełniają założenie, więc równanie ma trzy rozwiązania: $x = 0$, $x = 1-\sqrt{2}$ oraz $x = 1+\sqrt{2}$.

c) Zakładamy, że $x \neq -2$ i $x \neq 1$. Po przekształceniach otrzymujemy: $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} - 1 \geq 0$, skąd $\dfrac{x+5}{(x-1)(x+2)} \geq 0$. Zauważmy, że mianownik w pewnych przedziałach jest dodatni, w innych ujemny, więc po pomnożeniu przezeń obu stron nie wiedzielibyśmy, czy należy zmienić zwrot nierówności, czy też nie. Ominiemy ten problem, gdy obie strony nierówności pomnożymy przez kwadrat mianownika (przy założeniach, które zrobiliśmy, jest on liczbą dodatnią), otrzymując: $(x+5)(x-1)(x+2) \geq 0$. Rozwiązując tę nierówność (metodą „siatki znaków") otrzymujemy: $x \in < -5, -2 > \cup < 1, +\infty)$. Uwzględniając założenie otrzymujemy odpowiedź: $x \in < -5, -2) \cup (1, +\infty)$.

d) Założenie: $x \neq 0$. Mamy: $-2 \leq \frac{x-1}{x} \leq 2$, czyli $\frac{x-1}{x} \geq -2 \wedge \frac{x-1}{x} \leq 2$, skąd (po pomnożeniu obu stron obu nierówności przez x^2, przy założeniu $x \neq 0$): $x(3x-1) \geq 0 \wedge x(-x-1) \leq 0$. Po znalezieniu części wspólnej rozwiązań obu nierówności mamy: $x \in < -1; 0)$. Wszystkie liczby z tego przedziału spełniają założenie.

Ćwiczenia:

5.1. Rozwiązać równanie:

a) $\frac{3x+2}{x+4} = -2$, b) $\frac{x-1}{4} - \frac{x}{x+3} = 0$, c) $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+3}{x^2}$,

d) $\frac{x^2}{x^2 - x + 1} - \frac{3}{x^3 + 1} = 1$, e) $\frac{|x-1|}{x} = x$.

5.2. Rozwiązać nierówność:

a) $\frac{2-x}{x+3} \leq 0$, b) $1 - \frac{1-2x}{x+3} \geq 0$, c) $\frac{3x+7}{x-1} - 3 \leq 0$,

d) $\left|\frac{x}{x-2}\right| < 1$, e) $\left|\frac{x+1}{x+2}\right| \geq 2$.

5.3. Rozwiązać nierówność:

a) $\frac{2}{x} \geq \frac{1}{x+3}$, b) $\frac{1}{x-1} + \frac{5}{x^2 + x - 2} > 1$,

c) $\frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3}$, d) $\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x} \geq 1$.

5.4. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{x+5}{1 - \frac{x+1}{2-x}}$, b) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+5}}$,

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2-x}{x+3} - 1}}$, d) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}} - \frac{1}{|x+4|}$.

5.5. Naszkicować wykres funkcji:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, b) $f(x) = \frac{x}{4-x} - 1$, c) $f(x) = \left|\frac{x+1}{1-x}\right|$,

d) $f(x) = \left|\frac{x}{x+2}\right| - 1$, e) $f(x) = \frac{|x+1|}{x+2}$.

6. Funkcja potęgowa

Funkcją potęgową nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$f(x) = x^p, \quad x > 0,$$

gdzie $p \in R$.

Własności funkcji potęgowej:

Dla dowolnych x, y > 0 oraz $p, q \in R$ zachodzą równości:

$$(1) \quad x^p \cdot y^p = (x \cdot y)^p ,$$

$$(2) \quad \frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p ,$$

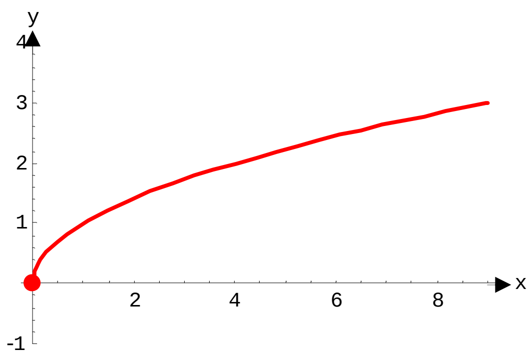
$$(3) \quad (x^p)^q = x^{p \cdot q} ,$$

$$(4) \quad x^{-p} = \frac{1}{x^p} = \left(\frac{1}{x}\right)^p ,$$

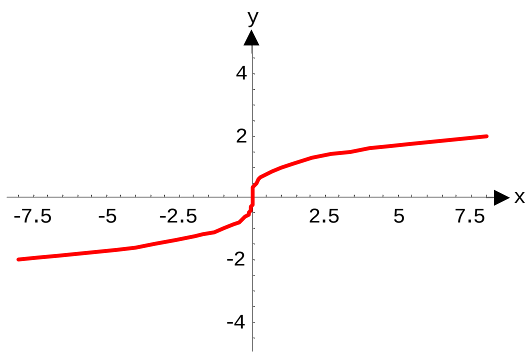
$$(5) \quad x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \quad (q \neq 0) .$$

Dla pewnych wartości p (wtedy, gdy nie prowadzi to do wykonywania niedozwolonych z punktu widzenia matematyki operacji) dziedzinę funkcji potęgowej rozszerza się do zbioru większego niż zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Wtedy należy ją ustalać w każdym przypadku oddzielnie. I tak na przykład dla funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ możemy przyjąć $D_f = <0,+\infty)$, dla funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ możemy przyjąć $D_f = R$, zaś dla funkcji $f(x) = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ mamy $D_f = R - \{0\}$.

Oto wykresy dwu ważnych funkcji potęgowych:



$f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in R$

Przykład 6.1. Wykorzystując przedstawione wyżej wykresy funkcji potęgowych znaleźć wykres funkcji:

a) $f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$, b) $f(x) = \sqrt{|x|}$.

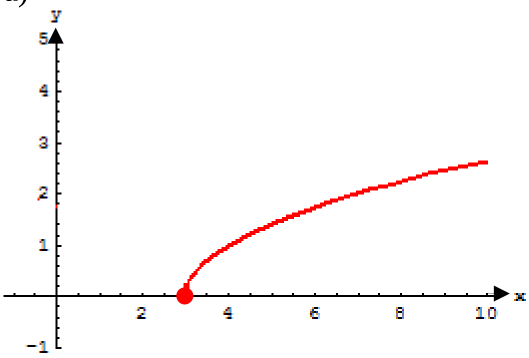
Rozwiązanie.

a) Wykorzystując wykres funkcji $i(x) = \sqrt{x}$, szkicując kolejno wykresy funkcji $h(x) = \sqrt{x-3}$ (rysunek a), $g(x) = -\sqrt{x-3}$ otrzymamy wykres szukanej funkcji (rysunek b). Najtrudniejszym etapem jest tu znalezienie wykresu funkcji h(x). Zauważmy, że $h(x) = \sqrt{x-3} = i(x-3)$. Możemy teraz wykorzystać informację, że:

aby z wykresu funkcji F(x) otrzymać wykres funkcji F(x – a), gdzie $a \in R$, należy wykres funkcji F(x) przesunąć o wektor $\vec{p} = [a, 0]$.

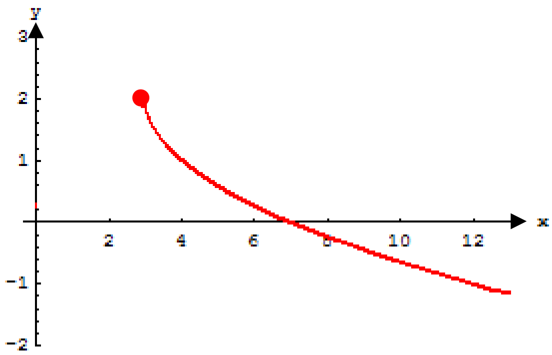
Wystarczy więc przesunąć wykres funkcji i(x) o wektor $\vec{p} = [3, 0]$, otrzymując wykres funkcji h(x). Dalsze etapy są już nam znane. Zatem:

a)



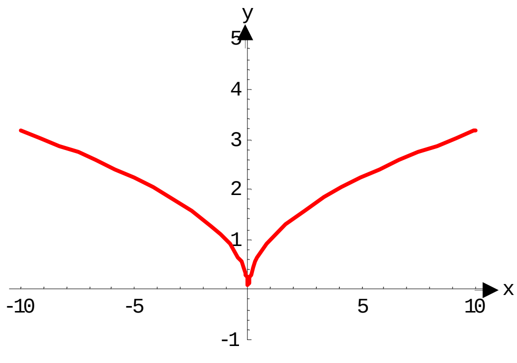
$f(x) = \sqrt{x-3}$

b)



$f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$

b) Zauważmy najpierw, że dla dowolnego $x \in R$ zachodzi (na mocy własności (3) wartości bezwzględnej) równość: $f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x)$, co oznacza, że funkcja f(x) jest parzysta. Ponadto, dla $x \geq 0$ mamy $f(x) = \sqrt{|x|} = \sqrt{x}$. Tak więc dla $x \geq 0$ szukany wykres jest taki sam, jak wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$. Z kolei parzystość powoduje, że wykres jest symetryczny względem osi OY, otrzymujemy więc:



$f(x) = \sqrt{|x|}$

Ćwiczenia:

6.1. Wykorzystując wykres odpowiedniej funkcji potęgowej znaleźć wykres funkcji:

a) $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$, b) $f(x) = \sqrt{2-x}$,

c) $f(x) = 1 - \sqrt{|x|}$, d) $f(x) = -\sqrt[3]{x-1}$.

7. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

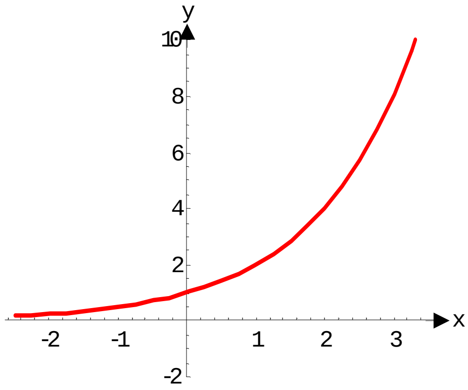
a) Funkcja wykładnicza

Funkcją wykładniczą o podstawie a nazywamy funkcję określoną wzorem:

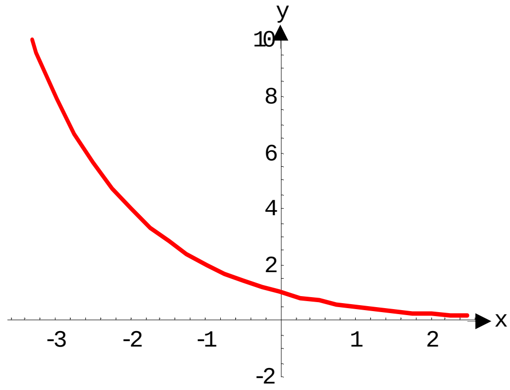
$$f(x) = a^x, \quad x \in R,$$

gdzie stała a spełnia warunki: $a > 0$ i $a \neq 1$.

Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy dwu funkcji wykładniczych:



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Wykresy innych funkcji wykładniczych mają podobny kształt do:
wykresu funkcji $f(x) = 2^x$, gdy a > 1,
albo
wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, gdy a ∈ (0, 1).

Własności funkcji wykładniczej:

a) Dla dowolnych $x_1, x_2 \in R$ zachodzą równości:

(1) $$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2},$$

(2) $$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2},$$

(3) $$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}.$$

b) Jeżeli a > 0 i a ≠ 1, to funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.
Z faktu tego wynika, że:

(4) $$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ gdy } a > 0 \text{ i } a \neq 1.$$

c) Jeżeli a > 1, to funkcja wykładnicza jest rosnąca w zbiorze R.
Wynika stąd, że:

(5) $$\begin{aligned} a^{x_1} > a^{x_2} &\Leftrightarrow x_1 > x_2 \\ a^{x_1} \geq a^{x_2} &\Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \\ a^{x_1} < a^{x_2} &\Leftrightarrow x_1 < x_2 \\ a^{x_1} \leq a^{x_2} &\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \end{aligned}$$, gdy a > 1.

d) Jeżeli a ∈ (0, 1), to funkcja wykładnicza jest malejąca w zbiorze R.
Stąd:

(6) $$\begin{aligned} a^{x_1} > a^{x_2} &\Leftrightarrow x_1 < x_2 \\ a^{x_1} \geq a^{x_2} &\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \\ a^{x_1} < a^{x_2} &\Leftrightarrow x_1 > x_2 \\ a^{x_1} \leq a^{x_2} &\Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \end{aligned}$$, gdy a ∈ (0, 1).

b) Funkcja logarytmiczna

Logarytmem przy dodatniej i różnej od jedności podstawie a z liczby dodatniej b nazywamy taką liczbę rzeczywistą c, że $a^c = b$:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \text{ gdy } a, b, c \in R \text{ i } a > 0 \text{ i } a \neq 1 \text{ i } b > 0.$$

Jeżeli a = 10, to często piszemy log b (lub lg b) zamiast $\log_{10} b$ i logarytm ten nazywamy dziesiętnym.

Własności logarytmu:

Jeżeli a > 0 i a ≠ 1, k∈R oraz x, y > 0, to:

(1) $$\log_a 1 = 0,$$

(2) $$\log_a a = 1,$$

(3) $$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

(4) $$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

(5) $$\log_a \left(x^k\right) = k \cdot \log_a x,$$

(6) $$a^{\log_a x} = x.$$

Jeżeli a, b, c > 0 oraz a, c ≠ 1, to

(7) $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

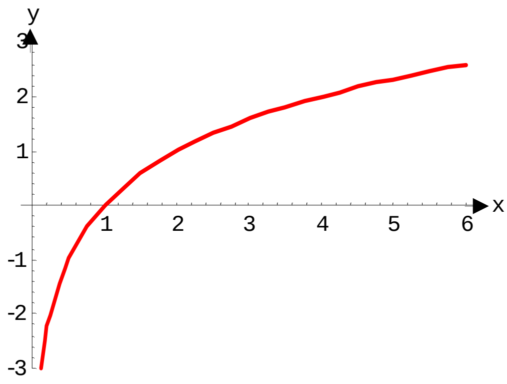
(wzór na zamianę podstawy logarytmu).

Funkcją logarytmiczną o podstawie a nazywamy funkcję określoną wzorem:

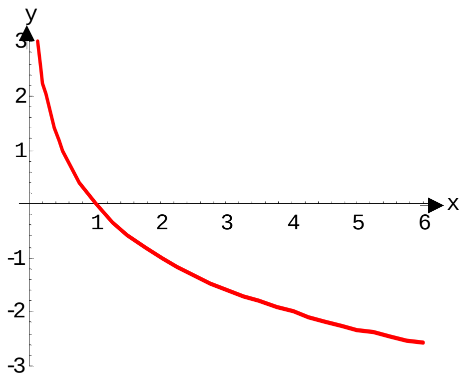
$$f(x) = \log_a x, \quad x > 0,$$

gdzie stała a spełnia warunki: $a \in R$, $a > 0$ i $a \neq 1$.

Oto wykresy niektórych funkcji logarytmicznych:



$f(x) = \log_2 x$



$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Wykresy innych funkcji logarytmicznych mają podobny kształt do:
wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$, gdy a > 1,
albo
wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, gdy a ∈ (0, 1).

Własności funkcji logarytmicznej:

a) Jeżeli a > 0 i a ≠ 1, to funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa.
Wynika stąd, że:

(1) $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, gdy a > 0 i a ≠ 1 oraz $x_1, x_2 > 0$.

b) Jeżeli a > 1, to funkcja logarytmiczna jest rosnąca w przedziale (0, +∞).
Zatem:

(2) $$\begin{matrix} \log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 \\ \log_a x_1 \ge \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \ge x_2 \\ \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \\ \log_a x_1 \le \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \end{matrix}, \text{ gdy a > 1 oraz } x_1, x_2 > 0.$$

c) Jeżeli a ∈ (0, 1), to funkcja logarytmiczna jest malejąca w przedziale (0, +∞).
Stąd:

(3) $$\begin{matrix} \log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \\ \log_a x_1 \ge \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \\ \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 \\ \log_a x_1 \le \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \ge x_2 \end{matrix}, \text{ gdy a} \in (0, 1) \text{ oraz } x_1, x_2 > 0.$$

Przykład 7.1. Naszkicować wykres funkcji:

a) $f(x) = 2^{-x-1}$,   b) $f(x) = \frac{|x|}{x} \cdot 2^x$.

Rozwiązanie.

a) Zauważmy, że (na mocy własności (3) funkcji wykładniczej) mamy: $2^{-x-1} =$

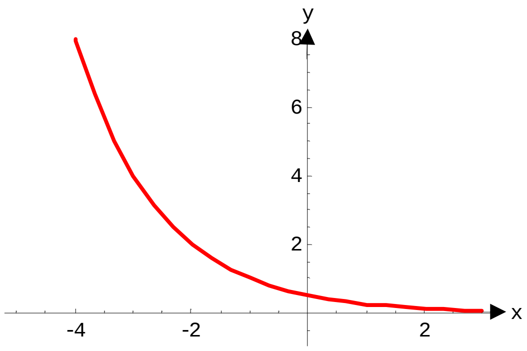
$= 2^{(-1)\cdot(x+1)} = \left(2^{-1}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$, wystarczy zatem przesunąć znany nam wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ o wektor $\vec{p} = [-1,0]$. W ten sposób otrzymujemy szukany wykres (rysunek a, poniżej).

b) Musimy założyć, że x ≠ 0. Mamy wtedy:

$$f(x) = \begin{cases} -2^x & dla \quad x < 0 \\ 2^x & dla \quad x > 0 \end{cases}.$$

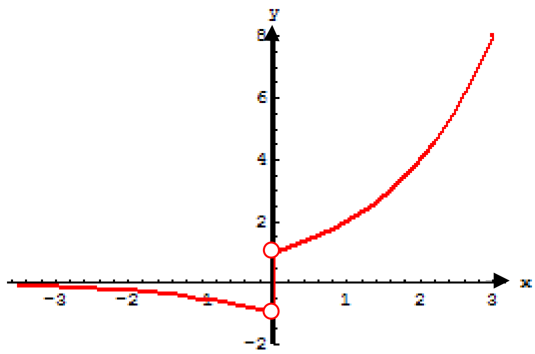
Otrzymujemy wykres, przedstawiony na rysunku b poniżej.

a)



$f(x) = 2^{-x-1}$

b)



$f(x) = \frac{|x|}{x}\cdot 2^x$

Przykład 7.2. Rozwiązać równanie lub nierówność:

a) $\frac{4^x}{8} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{6}{x}}$, b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{x}$.

Rozwiązanie.

a) Najpierw załóżmy, że x ≠ 0. Teraz (korzystając z własności działań na potęgach) przedstawimy obie strony w postaci potęg o podstawie 2,. Mamy zatem: $\frac{4^x}{8} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{6}{x}}$, skąd $\frac{2^{2x}}{2^3} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{x}}$ i, dalej, $2^{2x-3} = 2^{\frac{2}{x}}$. Na mocy własności (4) funkcji wykładniczej porównujemy wykładniki, otrzymując równanie: $2x - 3 = \frac{2}{x}$, którego rozwiązaniami, spełniającymi założenie, są: $x = -\frac{1}{2}$ oraz x = 2.

b) Mamy: $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{x}$, czyli $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$, skąd, na mocy własności (6) (wzór drugi), otrzymujemy: $|x-1| \leq 2x$. Rozwiązując ostatnią nierówność uzyskujemy odpowiedź: $x \in <\frac{1}{3},+\infty)$.

Przykład 7.3. Obliczyć:

a) $\log_3 \frac{1}{81}$, b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{4\cdot\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{16}}\right)$, c) $81^{\log_3 4-\frac{1}{2}}$.

Rozwiązanie.

a) Oznaczmy: $\log_3 \frac{1}{81} = x$. Z określenia logarytmu musi być: $3^x = \frac{1}{81}$, skąd $x = -4$.

Zatem: $\log_3 \frac{1}{81}$ = - 4.

b) Można rozwiązać ten przykład podobnie, jak poprzedni, a można też wykorzystać własności logarytmu. Pokażemy ten drugi sposób.

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{4\cdot\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{16}}\right) =$ (własność (4) logarytmu)

$= \log_{\frac{1}{2}}\left(4\cdot\sqrt[5]{2}\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[3]{16}\right) =$ (własność (3) logarytmu)

$= \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[5]{2}\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[3]{16}\right) =$

$= \log_{\frac{1}{2}} 2^2 + \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{5}}\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{4}{3}}\right) =$ (własność (5) logarytmu)

$= 2\cdot\log_{\frac{1}{2}} 2 + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} 2 - \frac{4}{3}\log_{\frac{1}{2}} 2 =$ (redukcja wyrazów podobnych)

$= \frac{13}{15}\cdot\log_{\frac{1}{2}} 2 =$ ($\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$)

$= \frac{13}{15}\cdot(-1) = -\frac{13}{15}$.

A więc: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{4\cdot\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{16}}\right) = -\frac{13}{15}$.

c) Mamy, korzystając z działań na potęgach: $81^{\log_3 4-\frac{1}{2}} = \frac{81^{\log_3 4}}{81^{\frac{1}{2}}} = \frac{81^{\log_3 4}}{\sqrt{81}} = \frac{81^{\log_3 4}}{9} =$

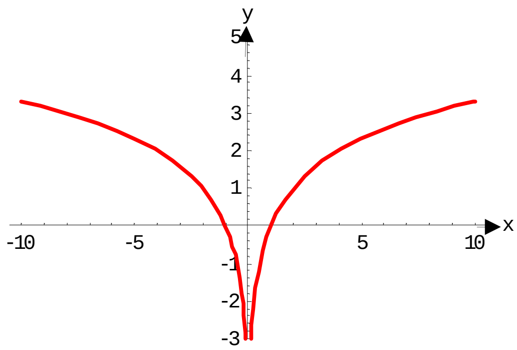
$\frac{\left(3^4\right)^{\log_3 4}}{9} = \frac{3^{4\cdot\log_3 4}}{9}$. Ponieważ $4\cdot\log_3 4 = \log_3\left(4^4\right) = \log_3 256$, więc $\frac{3^{4\cdot\log_3 4}}{9} = \frac{3^{\log_3 256}}{9}$.

Wykorzystamy teraz wzór z zadania 7.4. a), skąd mamy: $3^{\log_3 256} = 256$.

Zatem $81^{\log_3 4-\frac{1}{2}} = \frac{3^{\log_3 256}}{9} = \frac{256}{9}$.

Przykład 7.4. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = \log_2|x|$.

Rozwiązanie.
Musimy założyć, że $|x| > 0$. Z wykresu funkcji $f(x) = |x|$ łatwo odczytujemy, że przyjmuje ona wartości dodatnie dla $x \in R - \{0\}$. A więc $|x| > 0 \Leftrightarrow x \in R - \{0\}$.
Łatwo zauważyć, że funkcja, której wykresu szukamy, jest parzysta i że dla x > 0 jej wykres pokrywa się ze znanym nam wykresem funkcji $f(x) = \log_2 x$. Zatem:



$f(x) = \log_2|x|$

Przykład 7.5. Rozwiązać równanie lub nierówność:

a) $\log_3(x-2) = 2$, b) $\log_2(3x+5) - 2\log_2(x+1) = 1$,

c) $\log(x-1) < 2$, d) $\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| \geq 1$.

Rozwiązanie.
a) Najpierw musimy założyć, że x – 2 > 0, czyli, że x > 2. W równaniach lub nierównościach logarytmicznych często dobrze jest doprowadzić je do równości (lub nierówności) logarytmów o tej samej podstawie. Możemy zrobić to następująco (korzystając z własności logarytmu): $\log_3(x-2) = 2 = 2\cdot 1 = 2\cdot\log_3 3 = \log_3(3^2) = \log_3 9$. otrzymaliśmy zatem równanie: $\log_3(x-2) = \log_3 9$, skąd $x = 11$. Otrzymana liczba spełnia oczywiście założenie.
b) Zakładamy, że 3x + 5 > 0 $\wedge$ x + 1 > 0, czyli, że $x > -1$.
Mamy wtedy: $\log_2(3x-1) - 2\log_2(x+1) = 1$, czyli $\log_2(3x-1) - \log_2\left[(x+1)^2\right] = \log_2 2$, skąd $\frac{3x-1}{(x+1)^2} = 2$. Równość ta prowadzi do równania $2x^2 + x - 3 = 0$, którego rozwiązaniami są: x = $-\frac{3}{2}$ oraz x = 1. Po uwzględnieniu założenia wnioskujemy, że równanie ma jedno rozwiązanie: x = 1.
c) Założenie: x > 1. Wtedy: $\log(x-1) < 2$, czyli $\log(x-1) < 2\cdot 1$. Stąd $\log(x-1) < 2\cdot\log 10$, a więc $\log(x-1) < \log 100$. Na mocy własności (2) funkcji logarytmicznej (trzeci wzór)

otrzymujemy dalej: $x-1<100$, skąd x < 101. Po uwzględnieniu założenia mamy zatem: $x\in(1;101)$.

d) Założenie: x > 0. Zauważamy, że nierówność z zadania jest równoważna alternatywie nierówności: $\log_{\frac{1}{2}} x\le -1 \vee \log_{\frac{1}{2}} x\ge 1$, czyli alternatywie: $\log_{\frac{1}{2}} x\le \log_{\frac{1}{2}} 2 \vee \log_{\frac{1}{2}} x\ge \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$.
Korzystając teraz z własności (3) funkcji logarytmicznej (wzór czwarty oraz drugi) otrzymujemy: $x\ge 2 \quad \vee \quad x\le \frac{1}{2}$, czyli $x\in(-\infty,\frac{1}{2}>\cup<2,+\infty)$. Po uwzględnieniu założenia mamy odpowiedź: $x\in(0,\frac{1}{2}>\cup<2,+\infty)$.

Ćwiczenia:

7.1. Naszkicować wykres funkcji:

a) f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}$, b) f(x) = $2^{x-1}+1$,

c) f(x) = $\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}-1\right|$, d) f(x) = $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-1\right|+1$,

e) f(x) = $\frac{x-1}{|x-1|}\cdot 3^{|x-1|}$.

7.2. Rozwiązać równanie lub nierówność:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{1-2x}=\frac{1}{9^{3-x}}$, b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x^3}$, c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x}\ge\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$,

d) $3^{|x-2|}\ge\left(\sqrt[6]{3}\right)^{12}$, e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1+\frac{1}{x}}>\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3x^2}}$.

7.3. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) f(x) = $\frac{\sqrt{x+2}}{2^{x^2-3x}-1}$, b) f(x) = $\frac{\sqrt{5-|x|}}{3^{5-x^2}-3}$,

c) f(x) = $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-3|}-1}$, d) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{2^{x^2-|x|}-4}}$.

7.4. Wykazać, że:

a) jeżeli a > 0, a ≠ 1 i b > 0, to $a^{\log_a x}=x$,

b) jeżeli a, b > 0 i a, b ≠ 1, to $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$.

7.5. Obliczyć:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 9+\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$, b) $\log_4\left(\frac{\sqrt{2}}{4\cdot\sqrt[4]{8}}\right)$, c) $\frac{\log\left(\sqrt[6]{10}\right)}{\log\left(\sqrt[8]{100}\right)}$,

d) $\log_{\sqrt[3]{2}}\left(8\cdot\sqrt[3]{16}\right)$, e) $9^{\frac{1}{\log_5 3}}$.

7.6. Naszkicować wykres funkcji:

a) f(x) = $\log_3(x-2)$, b) f(x) = $\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$,

c) f(x) = $1+\log_2(x+1)$, d) f(x) = $-\log_3|x|$.

7.7. Rozwiązać równanie lub nierówność:

a) $\log_3(12-x)=2$, b) $2\log(x-2)-\log(3x-6)=\log 4$, c) $\log_2(x+2)\le 2$,

d) $\left|\log_{\frac{1}{3}} x\right|<1$, e) $\log\frac{x-2}{2x+3}\ge 0$.

7.8. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) f(x) = $\log_3(9x^2-x^4)$, b) f(x) = $\frac{\sqrt{2x-1}}{\log x}$,

c) f(x) = $\sqrt{-x}+\log(4x^2+12x+9)$, d) f(x) = $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x)}$,

e) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{\log(x^2-1)}}$.

8. Funkcje trygonometryczne

Określenie funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej:

Aby określić funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej potrzebne jest pojęcie kąta skierowanego: jest to uporządkowana para półprostych o wspólnym początku O (zwanym wierzchołkiem tego kąta). Pierwszą z tych półprostych nazywamy ramieniem początkowym, a drugą ramieniem końcowym kąta skierowanego.

W praktyce kąt skierowany często jest umieszczany w układzie współrzędnych tak, że jego wierzchołek jest początkiem układu, ramię początkowe pokrywa się z dodatnią półosią osi OX. Wyobraźmy sobie, że na początku ramię końcowe kąta pokrywa się z ramieniem początkowym. Następnie ramię końcowe wykonuje pewien obrót dookoła punktu O. W ten sposób powstaje pewien kąt skierowany. Jeżeli kierunek obrotu jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara, to powiemy, że orientacja tego kąta jest dodatnia, w przeciwnym przypadku, że jego orientacja jest ujemna.

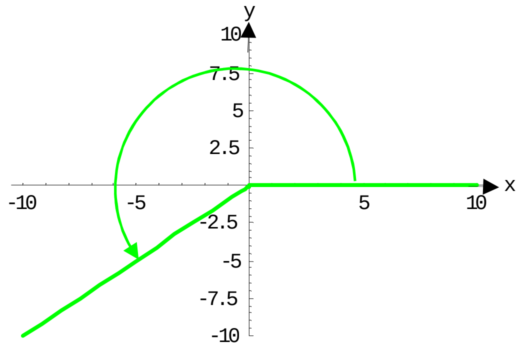
Mierzyć takie kąty będziemy w mierze łukowej. Jednostką jest tu 1 radian, a zależność miar stopniowej i łukowej jest następująca:

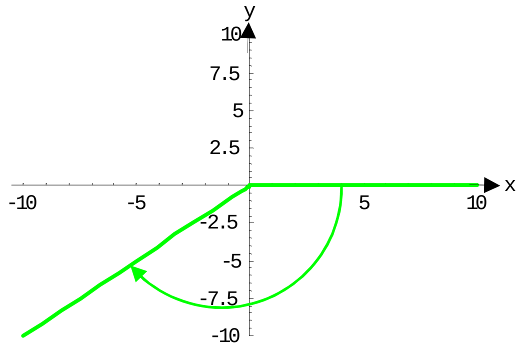
kątowi o mierze stopniowej 90^0 odpowiada kąt o mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$ radianów,

kątowi o mierze stopniowej 180^0 odpowiada kąt o mierze łukowej π radianów itd.

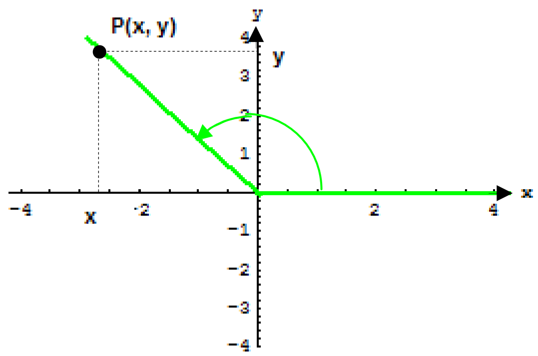
Kąty, których orientacja jest dodatnia (ujemna) mają miary dodatnie (ujemne).

Na poniższym rysunku przedstawiliśmy dwa kąty skierowane: na lewym rysunku kąt o mierze $\frac{5}{4}\pi$, a na prawym kąt o mierze $-\frac{3}{4}\pi$:





Niech α będzie dowolną liczbą rzeczywistą i niech $\alpha \in <0{,}2\pi)$. Przyporządkujmy liczbie α kąt skierowany, którego miarą jest α i umieśćmy go w układzie współrzędnych tak, aby jego wierzchołek pokrywał się z punktem O(0, 0), ramię początkowe zaś z dodatnią półosią osi OX. Obierzmy na ramieniu końcowym tego kąta dowolny punkt P(x, y), różny od punktu O. Oznaczmy przez r odległość punktu P od punktu O (oczywiście $r = \sqrt{x^2 + y^2}$).



Wówczas:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r},$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0; \quad ctg\ \alpha = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Można wykazać, że wartości powyższych ilorazów nie zależą od położenia punktu P na ramieniu końcowym danego kąta skierowanego.

W ten sposób określiliśmy funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej α, gdzie $\alpha \in <0{,}2\pi)$.

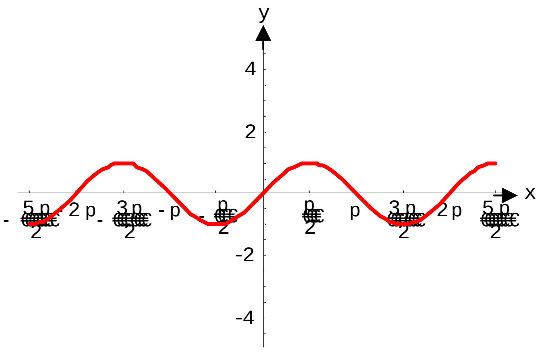
Niech teraz x będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Dla tej liczby można znaleźć takie dwie liczby: $\alpha \in <0{,}2\pi)$ oraz k∈C, że x = α + 2kπ (inaczej mówiąc α jest resztą z dzielenia x przez 2π). Możemy teraz określić sin x, cos x, tg x oraz ctg x następująco:

$$\sin x = \sin\alpha, \quad \cos x = \cos\alpha,$$

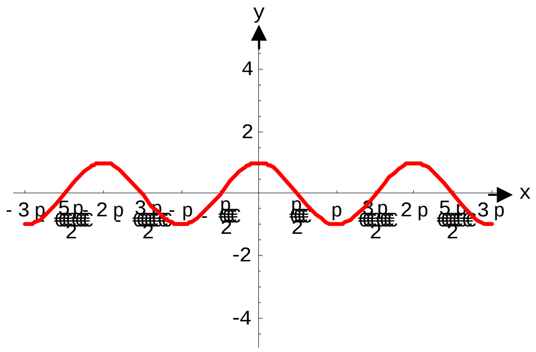
$$\text{tg } x = \text{tg } \alpha \ (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in C), \quad \text{ctg } x = \text{ctg } \alpha \ (x \neq k\pi,\ k \in C).$$

Określiliśmy w ten sposób funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej x.

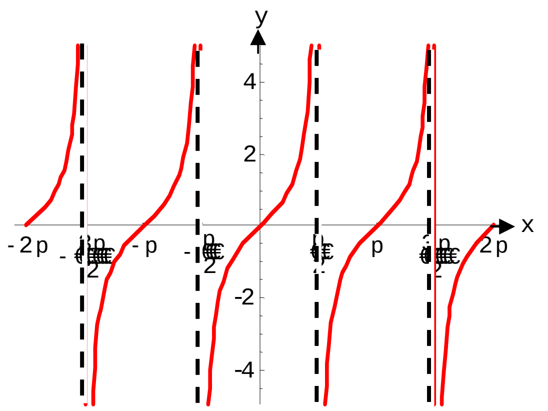
Oto wykresy podstawowych funkcji trygonometrycznych:



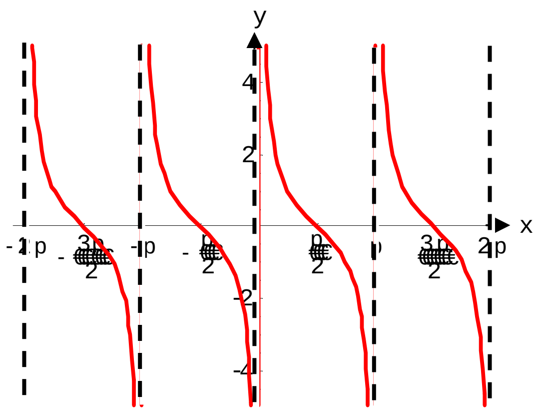
$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$



$f(x) = tg\ x$



$f(x) = ctg\ x$

Podstawowe związki trygonometryczne:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą równości:

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (tzw. „jedynka trygonometryczna”)

(2) $tg\ x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(\cos x \neq 0)$,

(3) $ctg\ x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $(\sin x \neq 0)$,

(4) $tg\ x \cdot ctg\ x = 1$ $(\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0)$.

Parzystość bądź nieparzystość funkcji trygonometrycznych:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą związki:

(1) $\cos(-x) = \cos x$ (parzystość funkcji cosinus),

(2) $\sin(-x) = -\sin x$ (nieparzystość funkcji sinus),

(3) $tg(-x) = -tg\ x$ $(\cos x \neq 0)$ (nieparzystość funkcji tangens)

(4) $ctg(-x) = -ctg\ x$ $(\sin x \neq 0)$ (nieparzystość funkcji cotangens)

Okresowość funkcji trygonometrycznych:
Dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby całkowitej k zachodzą związki:

(1) $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ (funkcja sinus jest okresowa o okresie zasadniczym 2π),
(2) $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ (funkcja cosinus jest okresowa o okresie zasadniczym 2π),
(3) $tg(x+k\pi)=tg\ x$ ($\cos x\neq 0$)
(funkcja tangens jest okresowa o okresie zasadniczym π),
(4) $ctg(x+k\pi)=ctg\ x$ ($\sin x\neq 0$)
(funkcja cotangens jest okresowa o okresie zasadniczym π).

Wzory redukcyjne:
W trygonometrii często zachodzi potrzeba obliczania wartości funkcji trygonometrycznych w taki sposób, aby wyrażały się one za pomocą wartości dla argumentów z przedziału $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Umożliwiają to tzw. wzory redukcyjne. Jest ich jednak bardzo dużo, co powoduje kłopoty z ich zapamiętaniem. Proponujemy inny sposób. Wyjaśnimy go na przykładzie:

Przykład 8.1. Obliczyć:

a) $\sin\left(\frac{21}{4}\pi\right)$, b) $\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right)$, c) $ctg\left(\frac{11}{3}\pi\right)$.

Rozwiązanie.
a): Najpierw „wydzielamy" z argumentu funkcji całkowite wielokrotności jej okresu i korzystamy z okresowości:

$$\sin\left(\frac{21}{4}\pi\right) = \sin\left(2\cdot 2\pi+\frac{5}{4}\pi\right)= \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right).$$

Teraz „wydzielamy" całkowite wielokrotności liczby $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\pi\right).$$

Jeżeli wielokrotność jest parzysta (jak w tym przypadku), to funkcja (w tym wypadku sinus) pozostaje, w przeciwnym wypadku zmienia się na tzw. kofunkcję (sinus na cosinus i odwrotnie, tangens na cotangens i odwrotnie).
Na koniec ustalamy, w której ćwiartce leży ramię końcowe kąta o podanej mierze. Kąt o mierze $2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\pi$ ma ramię końcowe w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, a w niej funkcja sinus przyjmuje wartości ujemne, co zmusza nas do postawienia znaku „minus" przed wynikiem. Mamy więc:

$$\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tak więc ostatecznie: $\sin\left(\frac{21}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (wielokrotność $\frac{\pi}{2}$ jest nieparzysta, więc cosinus zmienił się na sinus, ponadto $3\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, zatem $\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)>0$ i znaku „minus” nie stawiamy).

c) $ctg\left(\frac{11}{3}\pi\right) = ctg\left(3\cdot\pi+\frac{2}{3}\pi\right) = ctg\left(\frac{2}{3}\pi\right) = ctg\left(1\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą związki:

(1) $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$, (2) $\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$,

(3) $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$, (4) $\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$,

(5) $tg(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\cdot tg\,y}$ ($\cos x\neq 0$, $\cos y\neq 0$, $\cos(x+y)\neq 0$),

(6) $tg(x-y)=\frac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x\cdot tg\,y}$ ($\cos x\neq 0$, $\cos y\neq 0$, $\cos(x-y)\neq 0$),

(7) $ctg(x+y)=\frac{ctg\,x\cdot ctg\,y-1}{ctg\,x+ctg\,y}$ ($\sin x\neq 0$, $\sin y\neq 0$, $\sin(x+y)\neq 0$),

(8) $ctg(x-y)=\frac{ctg\,x\cdot ctg\,y+1}{ctg\,y-ctg\,x}$ ($\sin x\neq 0$, $\sin y\neq 0$, $\sin(x-y)\neq 0$).

Funkcje trygonometryczne argumentu podwojonego:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą związki:

(1) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$,

(2) $\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x = 2\cos^2 x-1 = 1-2\sin^2 x$,

(3) $tg\,2x=\frac{2tg\,x}{1-tg^2 x}$ ($\cos x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$),

(4) $ctg\,2x=\frac{ctg^2 x-1}{2ctg\,x}$ ($\sin x\neq 0$, $\sin 2x\neq 0$).

Wzory powyższe bywają czasem zapisane w postaci:

(5) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$,

(6) $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}-1=1-2\sin^2\frac{x}{2}$,

(7) $tg\,x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$ ($\cos\frac{x}{2}\neq 0$, $\cos x\neq 0$),

(8) $$ctg\,x=\frac{ctg^2\frac{x}{2}-1}{2ctg\frac{x}{2}}\quad (\sin\frac{x}{2}\neq 0,\ \sin x\neq 0).$$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą związki:

(1) $$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

(2) $$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

(3) $$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

(4) $$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}.$$

Równania trygonometryczne podstawowe i ich rozwiązania:

równanie	**rozwiązanie**
$\sin x=\sin y$	$x=y+2k\pi \ \vee\ x=\pi-y+2k\pi$, $k\in C$;
$\cos x=\cos y$	$x=y+2k\pi \ \vee\ x=-y+2k\pi$, $k\in C$;
$tg\,x=tg\,y$	$x=y+k\pi$, $k\in C$;
$ctg\,x=ctg\,y$	$x=y+k\pi$, $k\in C$.

Przykład 8.2. Obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych argumentu x, jeśli;

a) $\cos x=-\frac{1}{3}$ i $x\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$, b) $ctg\,x=-\frac{1}{7}$ i $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Rozwiązanie.

a) Z „jedynki trygonometrycznej” mamy: $\sin^2 x=1-\cos^2 x=\frac{8}{9}$, skąd $\sin x=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ lub $\sin x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ponieważ dla $x\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$ mamy $\sin x<0$, więc $\sin x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Dalej, $tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}=2\sqrt{2}$ oraz $ctg\,x=\frac{1}{tg\,x}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Zatem: $\sin x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $tg\,x=2\sqrt{2}$, $ctg\,x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) Mamy natychmiast: $tg\,x=\frac{1}{ctg\,x}=-7$. Dalej, ponieważ $ctg\,x=-\frac{1}{7}$ więc $\frac{\cos x}{\sin x}=-\frac{1}{7}$, skąd $\cos x=-\frac{1}{7}\sin x$. Dołączając „jedynkę trygonometryczną” otrzymujemy układ równań:

$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{7}\sin x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$, skąd: $\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{7}\sin x \\ \sin^2 x + \left(-\frac{1}{7}\sin x\right)^2 = 1 \end{cases}$, zatem: $\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{7}\sin x \\ \sin x = \frac{7\sqrt{2}}{10} \vee \sin x = -\frac{7\sqrt{2}}{10} \end{cases}$.

Ponieważ dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ mamy $\sin x > 0$, więc musi być $\sin x = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, czyli otrzymujemy ostatecznie: $\sin x = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, $tg\, x = -7$.

Przykład 8.3. Obliczyć: $\dfrac{ctg\left(-\frac{7}{3}\pi\right) \cdot tg\left(-\frac{23}{6}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{7}{6}\pi\right)}$.

Rozwiązanie.

1) Obliczymy najpierw $ctg\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$. Wobec nieparzystości funkcji cotangens mamy: $ctg\left(-\frac{7}{3}\pi\right) = -ctg\left(\frac{7}{3}\pi\right)$. Korzystając ze wzorów redukcyjnych obliczamy (wykorzystując okresowość funkcji cotangens) $ctg\left(\frac{7}{3}\pi\right) = ctg\left(2 \cdot \pi + \frac{\pi}{3}\right) = ctg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Zatem $ctg\left(-\frac{7}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) Obliczmy teraz $tg\left(-\frac{23}{6}\pi\right)$. Wobec nieparzystości funkcji tangens: $tg\left(-\frac{23}{6}\pi\right) = -tg\left(\frac{23}{6}\pi\right)$. Mamy dalej: $tg\left(\frac{23}{6}\pi\right) = tg\left(3 \cdot \pi + \frac{5}{6}\pi\right) = tg\left(\frac{5}{6}\pi\right) = tg\left(1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -ctg\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (w drugiej równości wykorzystaliśmy okresowość funkcji tangens, dalej zaś fakt, że $tg\left(1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < 0$, bo $1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$). Tak więc $tg\left(-\frac{23}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3) Teraz zauważamy, że $\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, a więc $\cos^2\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

4) Ostatecznie otrzymujemy: $\dfrac{ctg\left(-\frac{7}{3}\pi\right)\cdot tg\left(-\frac{23}{6}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{7}{6}\pi\right)} = \dfrac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3}{4}} = -\dfrac{4}{9}$.

Przykład 8.4. Obliczyć:

a) $\sin 2x$ i $\cos 2x$, jeśli wiadomo, że $\cos x = -\frac{1}{4}$ i $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$,

b) $\sin x$ i $\cos x$, jeśli wiadomo, że $ctg\frac{x}{2} = -2$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Rozwiązanie.

a) Ponieważ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, więc musimy obliczyć najpierw $\sin x$. Mamy: $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{15}{16}$, skąd $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4} \vee \sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, zatem na mocy faktu, że $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ otrzymujemy: $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ i, co za tym idzie, $\sin 2x = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Dalej, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -\frac{7}{8}$.

b) Ponieważ $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$, więc musimy najpierw obliczyć $\sin\frac{x}{2}$ i $\cos\frac{x}{2}$. Tworzymy układ równań: $\begin{cases} \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = -2 \\ \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 \end{cases}$, skąd, po uwzględnieniu danych zadania, mamy:

$\begin{cases} \cos\frac{x}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$. Zatem: $\sin x = -\frac{4}{5}$ oraz $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{3}{5}$.

Przykład 8.5. Wykazać, że dla dowolnego x jeżeli sin x ≠ 0 i cos x ≠ 0, to

$$\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{2\sin x\cos x} = -ctg 2x.$$

Rozwiązanie.

Przekształcimy lewą stronę równości: $L_{str.} = \dfrac{\sin^4 x - \cos^4 x}{2\sin x\cos x} =$

$$= \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2\sin x\cos x} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)\cdot 1}{2\sin x\cos x} = \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2\sin x\cos x} =$$

$= -\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = -ctg\,2x =$ P$_{str.}$. Równość została więc udowodniona (przy podanych założeniach).

Przykład 8.6. Naszkicować wykres funkcji:

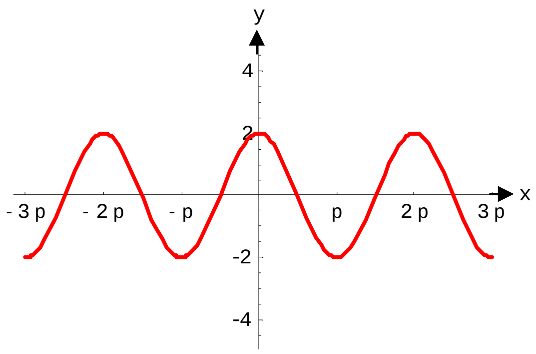
a) $f(x) = 2\cos x$, b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x$,

c) $f(x) = \sin 2x$, d) $f(x) = tg\,\dfrac{x}{2}$.

Rozwiązanie.
a) Pomnożenie wartości funkcji trygonometrycznej przez stałą powoduje zmianę zbioru wartości tej funkcji. W tym wypadku zmieni się on z przedziału <-1, 1> na przedział <-2, 2>. Otrzymujemy zatem wykres na rysunku a, poniżej.

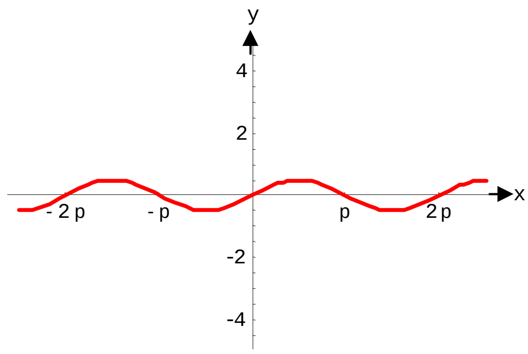
b) Tym razem zbiór wartości funkcji zmieni się z przedziału <-1, 1> na $\left\langle -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right\rangle$. Wykres przedstawiamy na rysunku b, poniżej.

a)



$f(x) = 2\cos x$

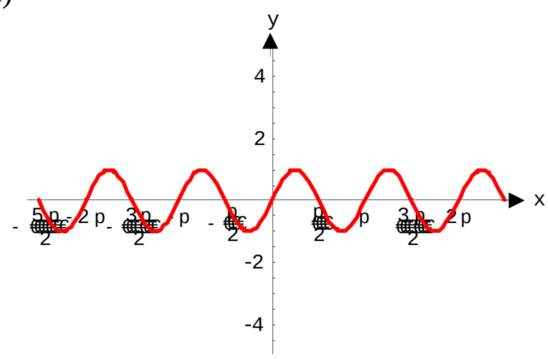
b)



$f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x$

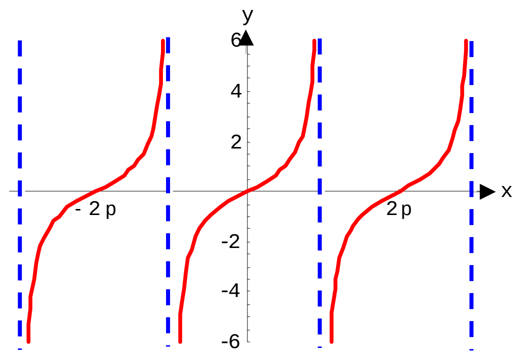
c) Pomnożenie natomiast argumentu funkcji trygonometrycznej powoduje zmianę jej okresu zasadniczego. W tym przypadku okres ten ulegnie dwukrotnemu zmniejszeniu, tzn. zmieni się z 2π na π. Wykres na rysunku c, poniżej.
d) Tutaj nastąpi z kolei zmiana okresu z π na 2π. Wykres na rysunku d.

c)



$f(x) = \sin 2x$

d)



$f(x) = tg\,\dfrac{x}{2}$

Przykład 8.7. Rozwiązać równanie:

a) sin x = 1, b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\sin x=-\frac{1}{2}$,

d) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, e) $tg^2 x=\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie.
a) Równanie to możemy rozwiązać, korzystając z wykresu funkcji f(x) = sin x. Zauważamy, że jednym z jego rozwiązań jest x = $\frac{\pi}{2}$. Następne powstają przez dodanie lub odjęcie od niego wielokrotności liczby 2π. Możemy zapisać zatem ogólnie: x = $\frac{\pi}{2}$ + k·2π, k∈C, lub x = $=\frac{\pi}{2}$+2kπ, k∈C.
b) Jednym ze sposobów rozwiązania równań w tym i następnych przykładach jest sprowadzenie ich do równania podstawowego. W tym przypadku, ponieważ $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, więc równanie przyjmuje postać $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$ i jest już równaniem podstawowym. Korzystając z postaci rozwiązania tego równania otrzymujemy: $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad\vee\quad x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in C$, skąd $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad\vee\quad x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in C$.
c) Mamy: $\sin x=-\frac{1}{2}$, czyli $\sin x=-\sin\frac{\pi}{6}$, skąd $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (wobec nieparzystości funkcji sinus). Ostatnie równanie jest podstawowe. Otrzymujemy więc: $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad\vee$ $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$, $k\in C$, skąd $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad\vee\quad x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$, $k\in C$.
d) Mamy: $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, a więc $\cos x=-\cos\frac{\pi}{4}$. W przypadku funkcji cosinus nie wolno teraz postąpić tak, jak w zadaniu c), bowiem cosinus nie jest funkcją nieparzystą. Możemy za to posłużyć się jednym ze wzorów redukcyjnych: $\cos(\pi-x)=-\cos x$, na mocy którego otrzymujemy $-\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$. Nasze równanie ma więc postać $\cos x=\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ i jest już równaniem podstawowym. Zatem otrzymujemy: $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi\vee$ $\vee x=-\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, $k\in C$.
e) Musimy założyć, że cos x ≠ 0. Rozwiążmy tę nierówność. Zauważmy najpierw (posługując się wykresem funkcji f(x) = cos x), że cos x = 0 ⇔ x = $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in C$. A więc cos x ≠ 0

gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in C$. Przy tym założeniu mamy (wykorzystując po drodze nieparzystość funkcji tangens): $tg^2 x = \frac{1}{3}$, skąd kolejno: $tgx = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$tgx = tg\frac{\pi}{6} \quad \vee \quad tgx = -tg\frac{\pi}{6}$ i, ostatecznie, $tgx = tg\frac{\pi}{6} \quad \vee \quad tgx = tg\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Otrzymaliśmy alternatywę równań podstawowych, zatem: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in C$. Żadne z tych dwu rozwiązań nie jest sprzeczne z założeniem.

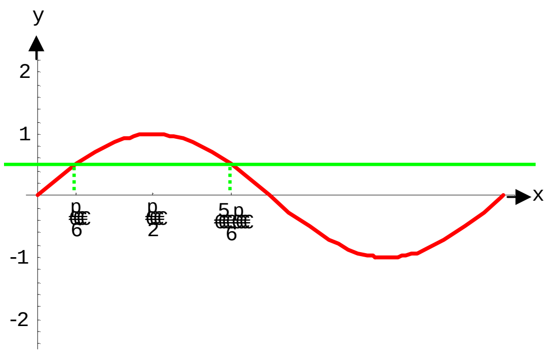
Przykład 8.8. Rozwiązać nierówność:

a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$, b) $|tg\ x| \geq 1$, c) $\cos 2x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie.
a) Nierówności trygonometryczne najwygodniej rozwiązywać z wykorzystaniem wykresu odpowiedniej funkcji trygonometrycznej. W tym punkcie zadania będzie nią funkcja f(x) = sin x.

Dobrze jest rozwiązać najpierw nierówność w dowolnym przedziale którego długość jest równa okresowi funkcji, a dopiero później znaleźć rozwiązanie ogólne.

Ponieważ okresem funkcji f(x) = sin x jest 2π, więc przyjmijmy za wspomniany przedział zbiór $< 0; 2\pi)$. Oto rysunek:



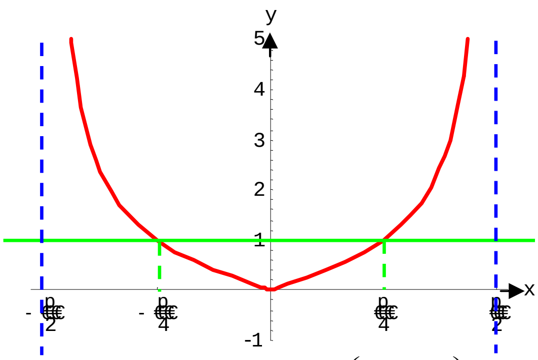
$f(x) = \sin x, x \in < 0; 2\pi)$

Linią ciągłą (zieloną) dorysowaliśmy dodatkowo prostą, będącą wykresem funkcji f(x) = $= \frac{1}{2}$. Widać, że przecina ona wykres funkcji w dwu punktach, których odcięte wynoszą $\frac{\pi}{6}$ oraz $\frac{5}{6}\pi$. Sprawdźmy rachunkiem, że odcięte te zostały odczytane prawidłowo. Możemy w tym celu rozwiązać równanie: $\sin x = \frac{1}{2}$ i wybrać z jego rozwiązania te argumenty, które należą do przedziału $< 0; 2\pi)$. Mamy: $\sin x = \frac{1}{2}$, zatem $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$, skąd $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee$

$\vee\ x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ \ k\in C$. Z obu tych rozwiązań w przedziale $<0;\,2\pi)$ znajdują się tylko $\frac{\pi}{6}$ oraz $\frac{5}{6}\pi$ (zgodnie z odczytem z rysunku). Widać teraz, że funkcja f(x) = sin x przyjmuje (w przedziale $<0;\,2\pi)$) wartości większe lub równe od $\frac{1}{2}$ dla $x\in\left\langle\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right\rangle$.

Na koniec znajdziemy rozwiązanie ogólne. Ze wspomnianej na początku okresowości funkcji sinus wnioskujemy, że inne przedziały, w których będzie spełniona nierówność sin x ≥ $\frac{1}{2}$ będą miały krańce, różniące się od znalezionych o wielokrotność liczby 2π. A więc mamy rozwiązanie ogólne: $x\in\left\langle\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right\rangle$, $k\in C$.

b) Okresem zasadniczym funkcji f(x) = $|tg\ x|$ jest π, a więc rozważmy wykres tej funkcji dla $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$:

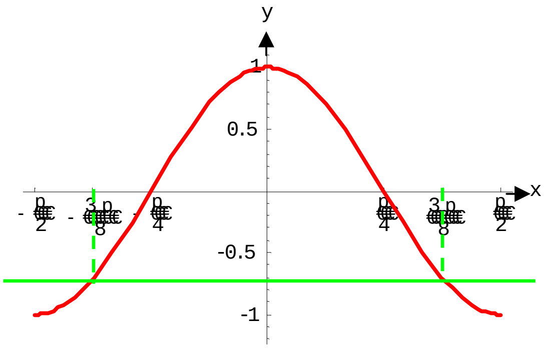


$f(x)=|tg\ x|,x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Szukamy odciętych punktów wspólnych wykresu funkcji $f(x)=|tg\ x|$ i wykresu funkcji $f(x)=1$. Mamy: $|tg\ x|=1$, czyli $tg\ x=-1\vee tg\ x=1$, skąd $tg\ x=tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)\vee tg\ x=tg\frac{\pi}{4}$, co zachodzi, gdy $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in C$. Z punktów tych w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ znajdują się istotnie tylko $-\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{\pi}{4}$. Zatem w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ rozwiązanie nierówności ma postać: $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}>\cup<\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$. Teraz łatwo otrzymujemy rozwiązanie ogólne:

$x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi>\cup<\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in C$.

c) Jak wiemy, okresem zasadniczym funkcji f(x) = cos 2x jest π, rozważmy więc jej wykres na przedziale $<-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$ (można też wziąć inny przedział, na przykład <0, π), ale w wybranym przez nas przedziale rozwiązanie da się, jak się za chwilę przekonamy, zapisać najprościej, w postaci jednego przedziału):



$$f(x) = \cos 2x, x \in \left< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

Szukamy odciętych punktów wspólnych wykresów funkcji: f(x) = cos 2x oraz f(x) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zatem musi być: $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,czyli $\cos 2x = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$, skąd $x = \frac{3}{8}\pi + k\pi \vee x = -\frac{3}{8}\pi + k\pi$, $k \in C$. Z obu tych rozwiązań w interesującym nas przedziale znajdują się $-\frac{3}{8}\pi$ oraz $\frac{3}{8}\pi$.

Widać, że rozwiązanie nierówności w przedziale $\left< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ ma postać: $x \in \left(-\frac{3}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi\right)$ (tu właśnie jest ono opisane jednym przedziałem), skąd łatwo otrzymujemy rozwiązanie ogólne: $x \in \left(-\frac{3}{8}\pi + k\pi, \frac{3}{8}\pi + k\pi\right)$, $k \in C$.

Ćwiczenia:

8.1. Ramię końcowe kąta skierowanego α znajduje się w II ćwiartce układu współrzędnych i zawiera się w prostej o równaniu $3y + \sqrt{3}x = 0$. Obrać na tym ramieniu końcowym trzy punkty P_1, P_2 i P_3 i wykorzystując ich współrzędne obliczyć kolejno dla każdego z nich wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

8.2. Obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta skierowanego α, jeśli wiadomo, że jego ramię końcowe jest zawarte w prostej o podanym równaniu i leży w podanej ćwiartce układu współrzędnych:

a) 3x – y = 0, III ćwiartka; b) 5y + x = 0, IV ćwiartka;

c) $\sqrt{3}y - x = 0$, III ćwiartka; d) $2y + \sqrt{7}x = 0$, II ćwiartka.

8.3. Obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych argumentu x, jeśli:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{4}$ i $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, b) $\cos x = \frac{2}{3}$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$,

c) $tg\, x = -\frac{\sqrt{11}}{5}$ i $x \in \left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$, d) $ctg\, x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$.

8.4. Obliczyć:

a) $\sin\left(-\frac{35}{6}\pi\right)$, b) $\cos\left(-\frac{22}{3}\pi\right)$, c) $tg\left(\frac{11}{3}\pi\right)$,

d) $ctg\left(\frac{10}{3}\pi\right)$, e) $\frac{\sin\left(-\frac{11}{3}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{tg^2\left(\frac{11}{6}\pi\right)}$.

8.5. Obliczyć:

a) sin 2x, jeśli cos x = $-\frac{1}{3}$ i $x\in\left(\frac{1}{2}\pi,\pi\right)$,

b) sin 2x, jeśli tg x = $\frac{1}{2}$ i $x\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$,

c) sin x, jeśli $\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$,

d) $\cos\frac{x}{2}$, jeśli cos x = $-\frac{1}{5}$ i $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

8.6. Wykazać, że dla dowolnego x:

a) jeżeli $\sin\frac{x}{2}\neq 0$ i $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, to $\frac{1+\cos x}{\sin x}=ctg\,\frac{x}{2}$,

b) jeżeli $\sin x\neq 0$, to $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=ctg\,x$,

c) jeżeli sin x $\neq$ 0 i cos x $\neq$ 0, to $\frac{1}{\sin 2x}-ctg 2x=tg\,x$,

d) jeżeli sin x + cos x $\neq$ 0, to $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x+\cos x)^2}$ = 1.

8.7. Naszkicować wykres funkcji:

a) f(x) = $-3\sin x$, b) f(x) = $|\cos 2x|$, c) f(x) = $1+\sin\frac{x}{2}$,

d) f(x) = $|tg 2x|$, e) f(x) $=-ctg\,\frac{x}{2}$.

8.8. Rozwiązać równanie:

a) sin x = $\frac{1}{2}$, b) $\cos x=-\frac{1}{2}$, c) $\sin^2$x = 1,

d) ctg x = $-\sqrt{3}$, e) $2\sin^2$x + sin x = 0.

8.9. Rozwiązać nierówność:

a) $\sin x<-\frac{1}{2}$, b) $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $|tg\,x|\geq\sqrt{3}$,

d) $\cos 2x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$, e) $\left|ctg\,\frac{x}{2}\right|\leq 1$.

Odpowiedzi.

1.1.

a) $|x+1|-2x+3=\begin{cases}2-3x & gdy \quad x<-1\\ 4-x & gdy \quad x\geq -1\end{cases}$, b) $x-|2-x|=\begin{cases}2(x-1) & gdy \quad x\leq 2\\ 2 & gdy \quad x>2\end{cases}$,

c) $|2x+1|+x-4=\begin{cases}-(x+5) & gdy \quad x<-\frac{1}{2}\\ 3(x-1) & gdy \quad x\geq -\frac{1}{2}\end{cases}$,

d) $|x-2|+|2x+3|=\begin{cases}-(3x+1) & gdy \quad x<-\frac{3}{2}\\ x+5 & gdy \quad -\frac{3}{2}\leq x<2\\ 3x+1 & gdy \quad x\geq 2\end{cases}$,

e) $|3x+2|-|x-4|=\begin{cases}-2(x+3) & gdy \quad x<-\frac{2}{3}\\ 2(2x-1) & gdy \quad -\frac{2}{3}\leq x<4\\ 2(x+3) & gdy \quad x\geq 4\end{cases}$.

1.2. a) x = $-\frac{5}{3}$ lub x = 1, b) x = 0 lub x = 1, c) $x\in(-5,-1)$,

d) $x\in(-\infty,-2>\cup<6,+\infty)$, e) $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{4}{3},+\infty)$.

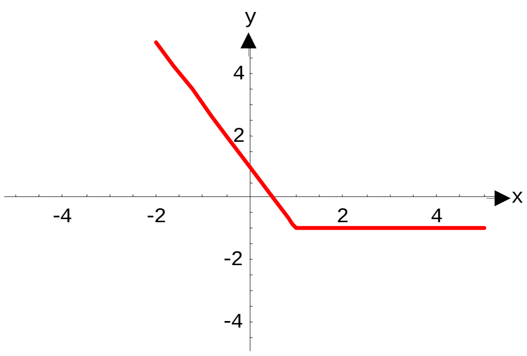
1.3. a) $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$, b) $x\in R$, c) $x\in(-\infty,-1)$, d) $x\in\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$, e) nierówność sprzeczna.

1. 4. a) $x\in(-\infty,-2>\cup<4,+\infty)$, b) $x\in(-3,3)$, c) $x\in(1,+\infty)$,

d) $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,3>$, e) $x\in(-\infty,\frac{3}{2}>$.

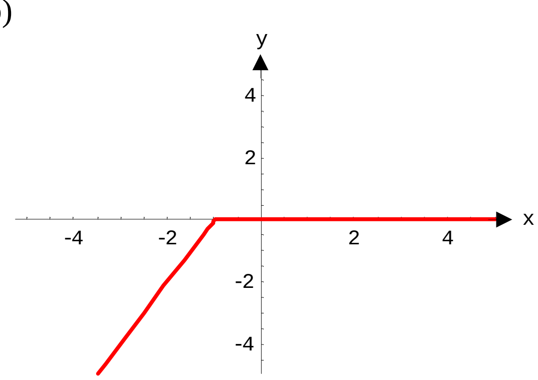
2.1.

a)



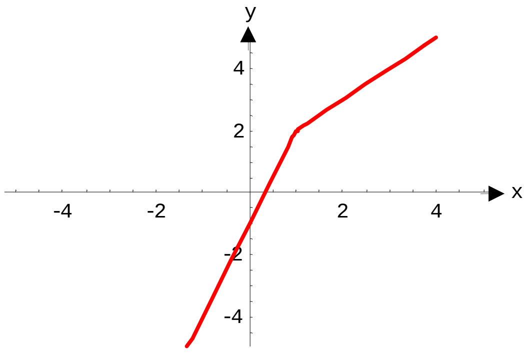
$f(x)=|x-1|-x$

b)



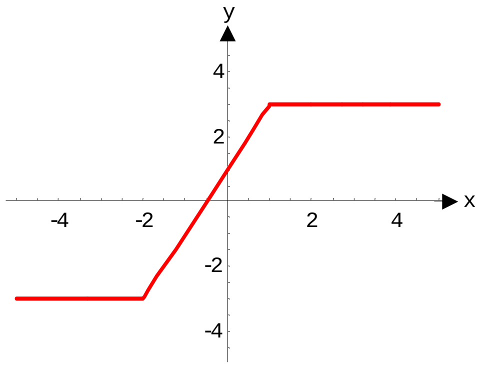
$f(x)=x+1-|x+1|$

c)



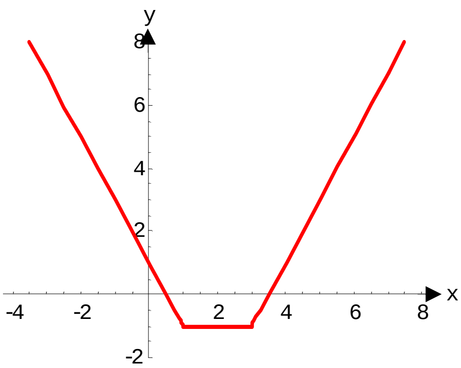
$f(x) = 2x - |1 - x|$

d)



$f(x) = |x + 2| - |x - 1|$

e)



$f(x) = |1 - x| + |3 - x| - 3$

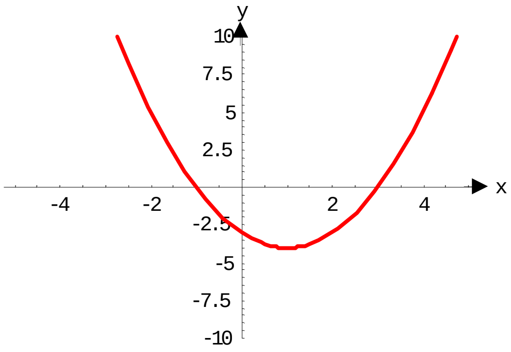
2.2. a) $x \in <0,+\infty)$, b) $x \in (-\infty,2)$, c) $x \in (3,+\infty)$, d) $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

3.1.

	postać kanoniczna	postać iloczynowa
a)	$f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$	$f(x) = -x(x-1)$
b)	$f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$	$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$
c)	$f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$	$f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$
d)	$f(x) = -(x+1)^2 - 1$	nie istnieje
e)	$f(x) = -(x+1)^2 + 4$	$f(x) = -(x-1)(x+3)$

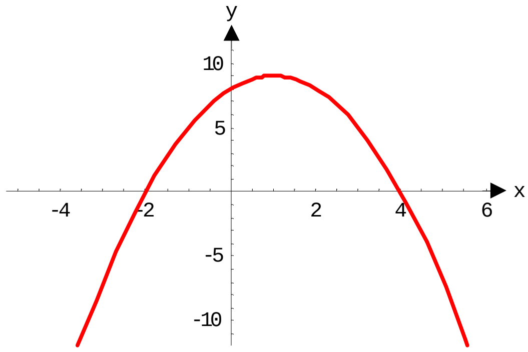
3.2.

a)



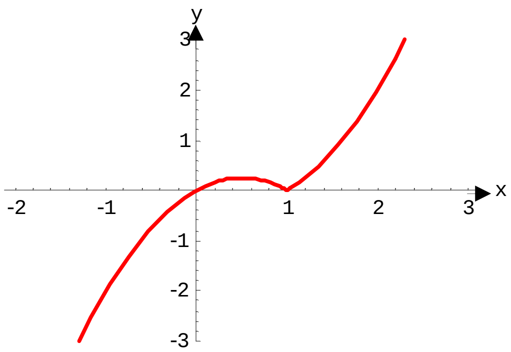
$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

b)



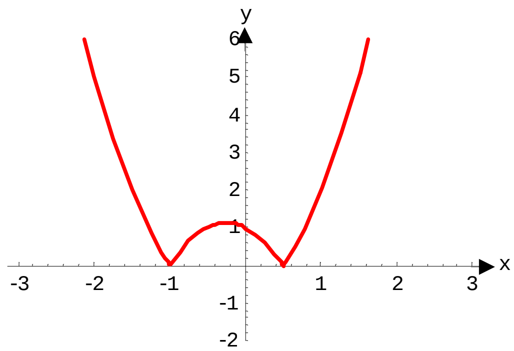
$$f(x) = 8 + 2x - x^2$$

c)



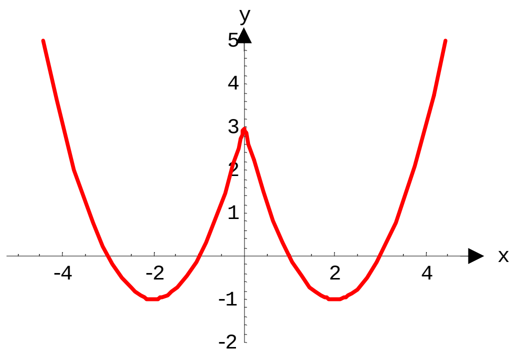
$$f(x) = x \cdot |x-1|$$

d)



$$f(x) = |2x^2 + x - 1|$$

e)



$$f(x) = x^2 - 4|x| + 3$$

3.3. a) $x \in (-\infty, 0> \cup <2, +\infty)$, b) $x \in \left(-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right)$, c) $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, d) x = 2, e) $x \in R - \{3\}$.

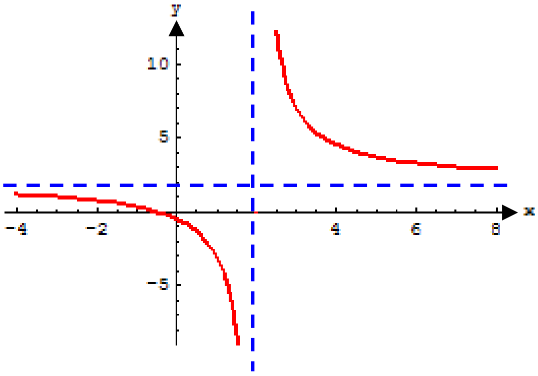
3.4. a) $x \in R - \{0,2\}$, b) $x \in (-\infty, -7) \cup (-7, -2> \cup <2, +\infty)$, c) $x \in \{-1, 0\}$, d) $x \in (-\infty, -2> \cup <\frac{1}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$, e) $x \in (-\infty, -2> \cup (4, +\infty)$.

4.1. a) $x^3 - 3x + 2 = (x^2 + x - 2)(x - 1)$, b) $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (x^2 + 2x + 3)(x + 1)$.
4.2. a) $P(x) + Q(x) = x^3 + x^2 + 4$, $P(x) - Q(x) = x^3 + x^2 - 2x$,
$P(x) \cdot Q(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 4$, $P(x) : Q(x) = x^2 - x + 1$;
b) $P(x) + Q(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$, $P(x) - Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$,
$P(x) \cdot Q(x) = x^5 - x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 8x + 16$, $P(x) : Q(x) = x + 1$.
4.3 a) $x^4 - x^3 + x + 1 = (x^3 + 1)(x - 1) + 2$,
b) $x^4 - x^3 - x^2 - x + 3 = (x^2 + x)(x^2 - 2x + 1) + (-2x + 3)$.
4.4. a) a = 2, b = -3; b) a = 3, b = -1; c) a = 1, b = -1; d) a = 1, b = -1.
4.5 a) r_1 i r_2, b) r_1, c) r_2 .
4.7 a) -1, 1, 2, b) -2, 1, 2, c) $\frac{1}{3}$, d) $-\frac{2}{3}$, 1.
4.8 a) $x(x - 1)(x^2 + x + 1)$, b) $x^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$, c) $x(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$,
d) $x(2 - 3x)(4 + 6x + 9x^2)$.
4.9. a) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$, b) $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$, c) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$,
d) $(1 - x)(1 + x)(x^2 + 2)$.
4.10. a) $(x - 2)^2(x + 2)$, b) $(x - 1)^2(x + 1)$, c) $(x - 2)(x^2 + 2)$, d) $(x - 3)(x^2 + 3)$.
4.11. a) $(x - 1)(3x^2 + x + 1)$, b) $(x + 2)(x^2 - x + 2)$, c) $x(x - 4)(x^2 + 4x + 5)$,
d) $x(x + 3)(3x^2 - 9x + 10)$.
4.12. a) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$ lub x = 2, b) x = -1 lub x = 2, c) $x = -\frac{1}{2}$, d) x = -1 lub x = 1,
e) x = 0 lub $x = \frac{3}{2}$.
4.13. a) $x \in (-4,3) \cup (4,+\infty)$, b) $x \in \left(-\infty,-\sqrt{7}\right) \cup \left(-1,\sqrt{7}\right)$, c) $x \in (-\infty,-2> \cup \{0\} \cup <2,+\infty)$,
d) x = -1, e) $x \in \left(-\frac{1}{2},0\right) \cup (0,+\infty)$.

5.1. a) x = -2, b) x = -1 lub x = 3, c) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$, d) x = -2 lub x = 2,
e) $x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
5.2. a) $x \in (-\infty,-3) \cup <2,+\infty)$, b) $x \in (-\infty,-3) \cup <-\frac{2}{3},+\infty)$, c) $x \in (-\infty,1)$, d) $x \in (-\infty,1)$,
e) $x \in <-3,-2) \cup (-2,-\frac{5}{3}>$.
5.3. a) $x \in <-6,-3) \cup (0,+\infty)$, b) $x \in (-3,-2) \cup (1,3)$, c) $x \in (-\infty,-\frac{1}{3}> \cup (0,\frac{1}{2}>$,
d) $x \in <-1,0)$.
5.4. a) $x \in R - \left\{\frac{1}{2},2\right\}$, b) $x \in (-5;2>$, c) $x \in \left(-3,-\frac{1}{2}\right)$,
d) $x \in (-\infty,-4) \cup (-4,-2) \cup <3,+\infty)$.

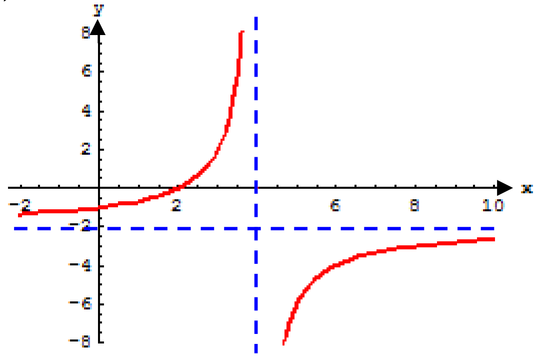
5.5.

a)



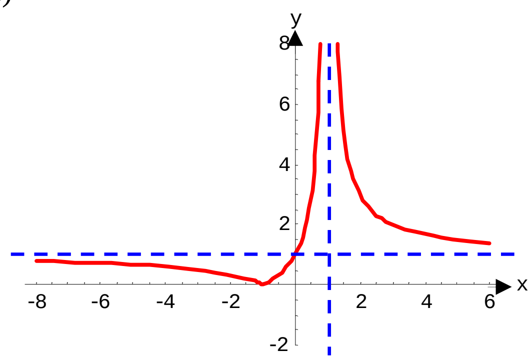
$$f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$$

b)



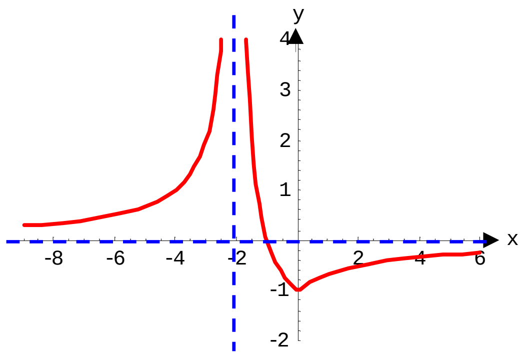
$$f(x)=\frac{x}{4-x}-1$$

c)



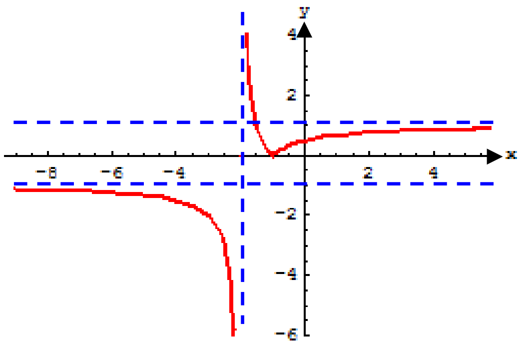
$$f(x)=\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$

d)



$$f(x)=\left|\frac{x}{x+2}\right|-1$$

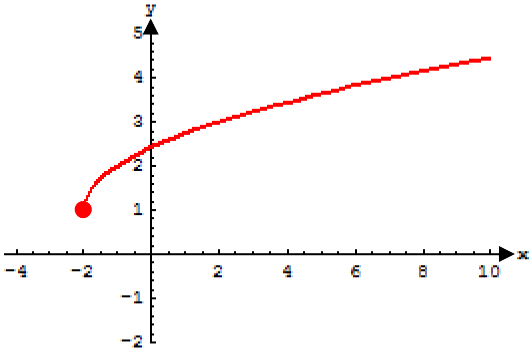
e)



$$f(x)=\frac{|x+1|}{x+2}$$

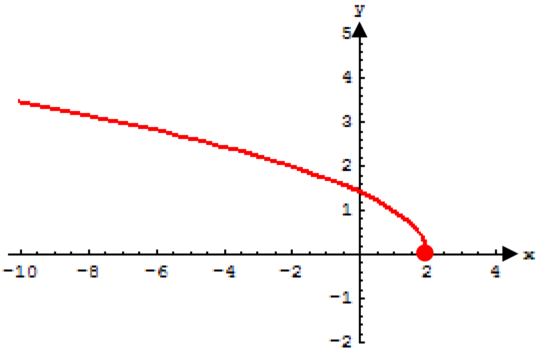
6.1.

a)



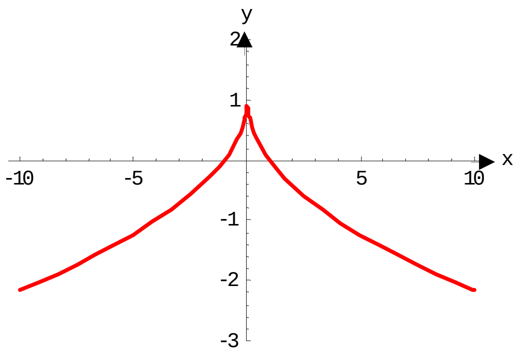
$f(x)=\sqrt{x+2}+1$

b)



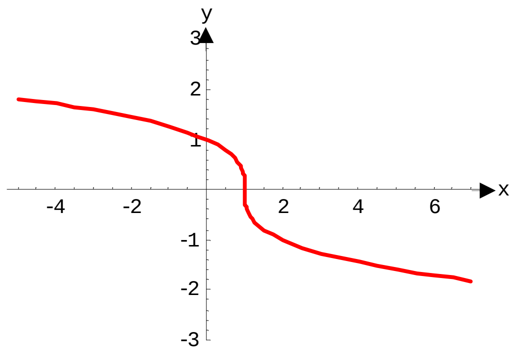
$f(x)=\sqrt{2-x}$

c)



$f(x)=1-\sqrt{|x|}$

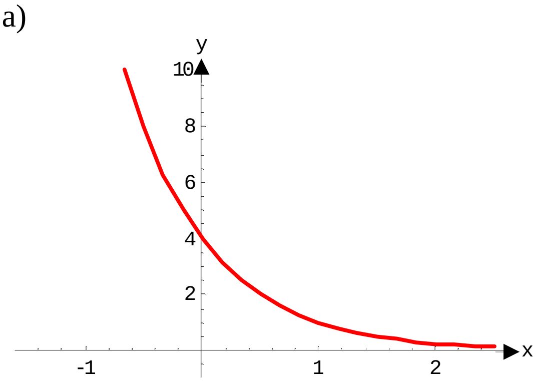
d)



$f(x)=-\sqrt[3]{x-1}$

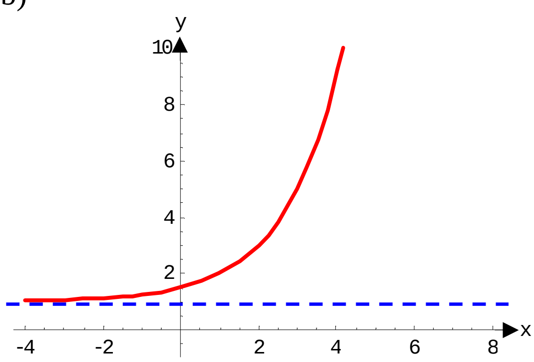
7.1.

a)



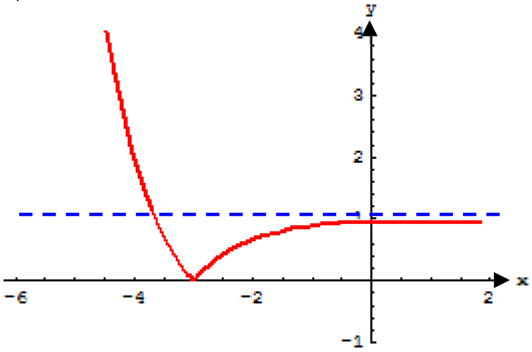
$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}$

b)



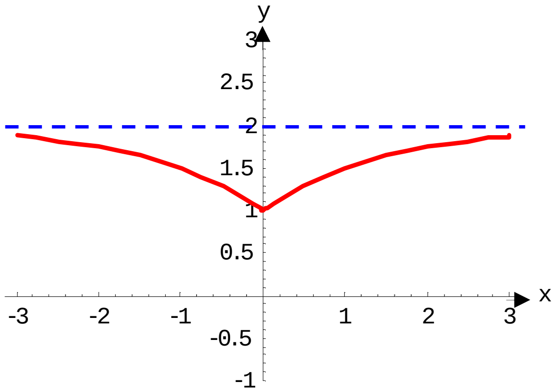
$f(x)=2^{x-1}+1$

c)



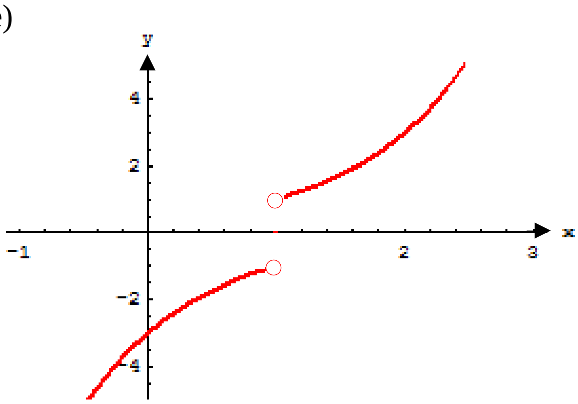
$$f(x)=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}-1\right|$$

d)



$$f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-1\right|+1$$

e)



$$f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}\cdot 3^{|x-1|}$$

7.2. a) x = $\frac{13}{6}$, b) x = 0 lub x = 1, c) $x \in <-2;0>$, d) $x \in (-\infty,0> \cup <4,+\infty)$,
e) $x \in (-2;0) \cup (0;1)$.

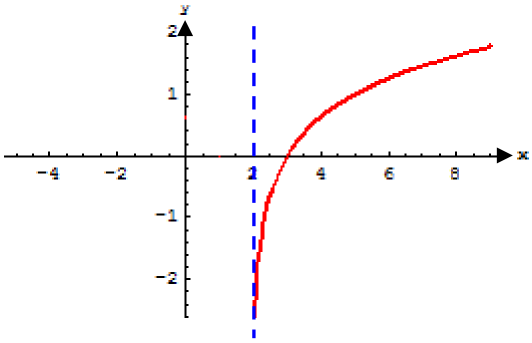
7.3. a) $x \in <-2;0) \cup (0;3) \cup (3,+\infty)$, b) $x \in <-5,-2) \cup (-2;2) \cup (2;5>$, c) x = 3,
d) $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

7.4. a) Wskazówka: Wprowadzić oznaczenie: t = $\log_a x$. Skorzystać z definicji logarytmu i zauważyć równość lewej i prawej strony tezy.
b) Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o zamianie podstawy logarytmu przyjmując c = b.

7.5. a) $-\frac{7}{3}$, b) $-\frac{9}{8}$, c) $\frac{2}{3}$, d) 13, e) 25.

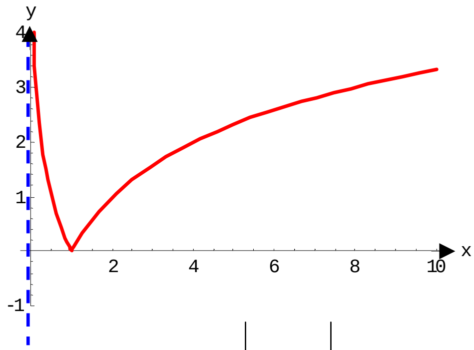
7.6.

a)



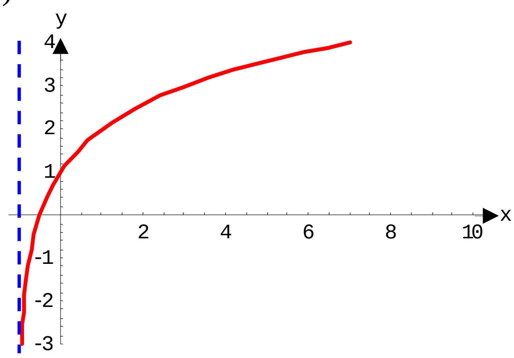
$f(x)=\log_3(x-2)$

b)



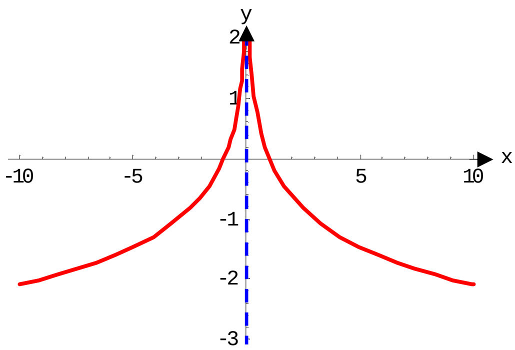
$f(x)=\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$

c)



$f(x)=1+\log_2(x-2)$

d)



$f(x)=-\log_3|x|$

7.7. a) x = 3, b) x = 14, c) $x\in(-2;2>$, d) $x\in\left(\frac{1}{3},3\right)$, e) $x\in<-5,-\frac{3}{2})$.

7.8. a) $x\in(-3;0)\cup(0;3)$, b) $x\in<\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$, c) $x\in(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-\frac{3}{2},0>$,
d) $x\in<-1-\sqrt{2},-2)\cup(0;\sqrt{2}-1>$, e) $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

8.2. a) $\sin\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$, $tg\alpha=3$, $ctg\alpha=\frac{1}{3}$; b) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{26}}{26}$, $\cos\alpha=\frac{5\sqrt{26}}{26}$, $tg\alpha=-\frac{1}{5}$, $ctg\alpha=-5$; c) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $ctg\alpha=\sqrt{3}$; d) $\sin\alpha=\sqrt{\frac{7}{11}}$, $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{11}}{11}$, $tg\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{2}$, $ctg\alpha=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

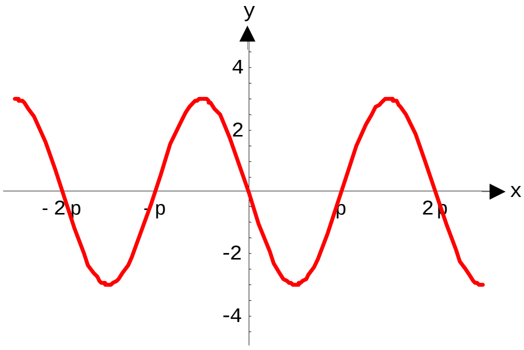
8.3. a) $\cos x=-\frac{\sqrt{11}}{4}$, $tg\,x=\sqrt{\frac{5}{11}}$, $ctg\,x=\sqrt{\frac{11}{5}}$; b) $\sin x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $tg\,x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $ctg\,x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$; c) $\sin x=\frac{\sqrt{11}}{6}$, $\cos x=-\frac{5}{6}$, $ctg\,x=-\frac{5\sqrt{11}}{11}$; d) $\sin x=-\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\cos x=\frac{2\sqrt{7}}{7}$, $tg\,x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8.4. a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) $-\sqrt{3}$, d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, e) $-\frac{9}{4}$.

8.5. a) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$, b) $\frac{4}{5}$, c) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, d) $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

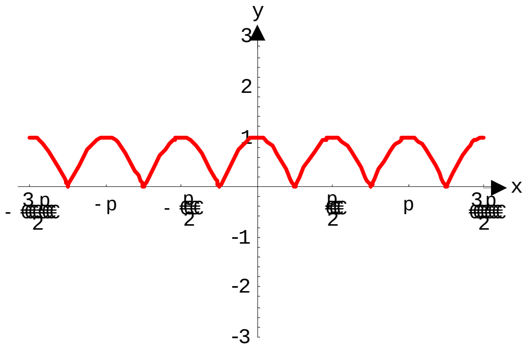
8.7.

a)



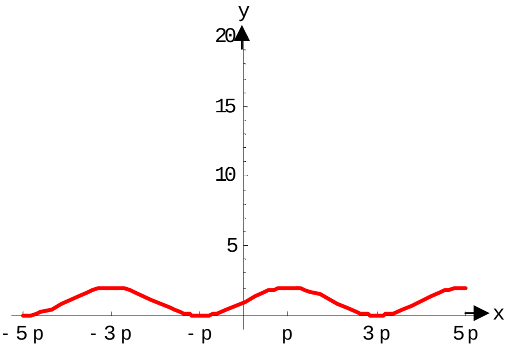
$f(x) = -3\sin x$

b)



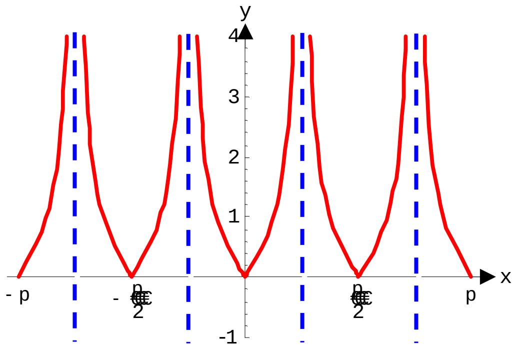
$f(x) = |\cos 2x|$

c)



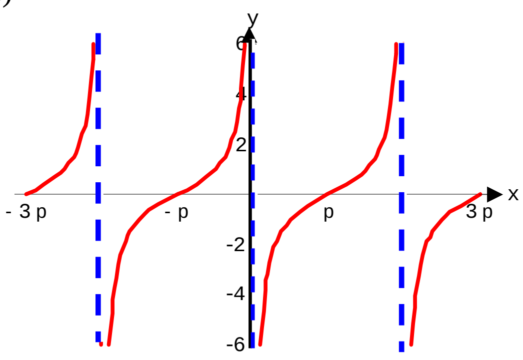
$f(x) = 1 + \sin\frac{x}{2}$

d)



$f(x) = |tg\, 2x|$

e)



$f(x) = -ctg\frac{x}{2}$

8.8. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in C$; b) $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in C$;

c); $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ \vee \ x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, $k\in C$; d) $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in C$;

e) $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi \vee x=k\pi$, $k\in C$.

8.9. a) $x\in\left(\frac{7}{6}\pi+2k\pi,\frac{11}{6}\pi+2k\pi\right)$, $k\in C$; b) $x\in\left\langle-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\rangle$, $k\in C$;

c) $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{3}+k\pi\right\rangle\cup\left\langle\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in C$;

d) $x\in\left(-\frac{5}{12}\pi+k\pi,\frac{5}{12}\pi+k\pi\right)$, $k\in C$; e) $x\in\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right\rangle$, $k\in C$.