Spis treści

Zadania wybrane ze skryptu dra Jerzego Chmaja

1. PRAWDOPODOBIEŃSTWO

1.1 Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}\}$ pewnego doświadczenia losowego. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(\{\omega_{10}\})$, jeśli

$$P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, 8, \quad \text{oraz} \quad P(\{\omega_9\}) = 0{,}001 \ .$$

1.2 Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_9\}$ pewnego doświadczenia losowego. Wyznacz wartość *k*, jeśli

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_8\}) = 2^k \ \text{oraz} \ P(\{\omega_9\}) = \tfrac{1}{2} .$$

1.3 Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}\}$ pewnego doświadczenia losowego. Wyznacz wartość *k*, jeśli

$$P(\{\omega_1\}) = 2k, \ P(\{\omega_2\}) = 4k, \ \ldots, \ P(\{\omega_n\}) = 20k.$$

1.4 Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A)$, jeżeli $16P(A)P(A') = 3$.

1.5 Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A)$, jeżeli $P(A) = 5P(A')$.

1.6 Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi prawidłowymi. Niech zdarzenie *A* polega na tym, że suma oczek jest liczbą nieparzystą, a zdarzenie *B* - na otrzymaniu jedynki co najmniej na jednej kostce. Obliczyć prawdopodobieństwa:

(a) $P(A \cap B)$, **(b)** $P(A \cup B)$, **(c)** $P(A \cap B')$.

1.7 Rzucamy trzema symetrycznymi monetami. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania

(a) dokładnie jeden raz orła,

(b) dokładnie dwa razy orła,

(c) co najmniej jeden raz orła,

(d) co najwyżej dwa razy orła.

1.8 20-osobowa grupa studencka, w której jest 6 studentek, otrzymała 5 biletów do teatru. Bilety rozdziela się drogą losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród posiadaczy biletów znajdą się dokładnie 3 studentki ?

1.9 Partia towaru składa się ze 100 elementów. Wśród nich jest 5 elementów wadliwych. Poddajemy kontroli 50 elementów. Partię przyjmujemy, jeśli wśród kontrolowanych elementów jest nie więcej niż jeden wadliwy. Obliczyć prawdopodobieństwo przyjęcia partii towaru.

1.10 Rzucono *10* kostek sześciennych prawidłowych. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek będzie równa (a) 10; (b) 11.

1.11 W pudle kartonowym znajduje się 100 opakowań pewnego leku, przy czym 5 opakowań zawiera lek przeterminowany. Farmaceuta losowo wyciągnął 3 opakowania. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

(a) żadne z wyciągniętych opakowań nie zawiera leku przeterminowanego,

(b) co najwyżej jedno opakowanie zawiera lek przeterminowany,

(c) co najmniej dwa opakowania zawierają lek przeterminowany.

1.12 Student zna odpowiedzi na 20 spośród 25 pytań przygotowanych na egzamin. Jakie jest prawdopodobieństwo, że student odpowie na co najmniej 3 pytania z 4 losowo wybranych z przygotowanych na egzamin.

1.13 W 20-osobowej grupie znajduje się 12 studentek i 8 studentów. Oblicz prawdopodobieństwo wybrania 6-osobowej delegacji:

(a) w której znajdą się 4 studentki,

(b) w której znajdą się co najmniej 4 studentki,

(c) w której znajdą się co najwyżej 3 studentki.

Odpowiedzi:

1.1 $\frac{93}{32000}$

1.2 $k = -4$

1.3 $k = \frac{1}{110}$

1.4 0,25 lub 0,75

1.5 $\frac{5}{6}$

1.6 **(a)** $\frac{1}{6}$, **(b)** $\frac{23}{36}$, **(c)** $\frac{1}{3}$

1.7 **(a)** $\frac{3}{8}$, **(b)** $\frac{3}{8}$, **(c)** $\frac{7}{8}$, **(d)** $\frac{7}{8}$

1.9 $\dfrac{\binom{95}{50}+\binom{95}{49}\binom{5}{1}}{\binom{100}{50}} \approx 0,181$

1.10 **(a)** $\mathbf{6^{-10}}$, **(b)** $\mathbf{10 \cdot 6^{-10}}$

1.11

(a) $\dfrac{\binom{95}{3}}{\binom{100}{3}} \approx 0,856$,

(b) $\dfrac{\binom{95}{3}+\binom{95}{2}\binom{5}{1}}{\binom{100}{3}} \approx 0,994$

,

(c) 0,006

1.12 $\dfrac{\binom{20}{3}\binom{5}{1}+\binom{20}{4}}{\binom{25}{4}} \approx 0,834$

1.13

(a) $\mathbf{\frac{231}{646}}$, **(b)** $\mathbf{\frac{176}{323}}$,

1.8 $\dfrac{\binom{6}{3}\binom{14}{2}}{\binom{20}{5}} \approx 0{,}117$ **(c)** $\frac{147}{323}$,

2. PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE I CAŁKOWITE. WZÓR BAYESA

2.1 Zdarzenia *A* i *B* wykluczają się przy czym $P(A)=0,4$ oraz $P(B)=0,6$. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A|B)$.

2.2 Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A)$ jeśli $P(A|B)=0,6$, $P(B|A)=0,2$, $P(B)=0,1$.

2.3 Na I roku pewnej uczelni zaobserwowano, że 25% studentów uzyskuje dobre wyniki z przedmiotu *A*, 60% z przedmiotu *B*, a 20% jednocześnie z obu tych przedmiotów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany student

(a) uzyskuje dobre wyniki z przedmiotu *B* pod warunkiem, że uzyskuje dobre wyniki z przedmiotu *A*,

(b) uzyskuje dobre wyniki z przedmiotu *A* pod warunkiem, że uzyskuje dobre wyniki z przedmiotu *B*.

2.4 Prawdopodobieństwo, że pacjent przeżyje pewną operację transplantacji jest równe 0,55. Prawdopodobieństwo, że organizm pacjenta, który przeżył operację transplantacji, odrzuci przeszczepiony narząd w ciągu miesiąca jest równe 0,20. Jakie jest prawdopodobieństwo przeżycia obu tych krytycznych etapów leczenia ?

2.5 W dwóch urnach znajduje się po 6 czarnych i 4 białe kule. Z pierwszej urny losowo wyciągnięto jedną kulę i przełożono do drugiej urny. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wyciągnięta kula z drugiej urny okaże się biała.

2.6 Dane są dwie urny o następującym składzie: w I urnie znajduje się 6 kul czarnych i 9 kul białych, a w II znajduje się 5 czarnych i 15 białych kul. Wylosowano 2 kule z I urny i nie oglądając ich wrzucono do II urny. Obliczyć prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej z II urny przy nowym jej składzie.

2.7 I rok pewnego wydziału Akademii Medycznej składał się ze studentów którzy ukończyli licea o kierunkach: biologiczno-chemicznym, ogólnym i matematyczno-fizycznym, w ilościach, odpowiednio, 60, 40 i 20. Wieloletnie obserwacje dowiodły, że prawdopodobieństwa terminowego ukończenia studiów dla poszczególnych grup studentów były, odpowiednio, równe: 0,6 , 0,4 i 0,7. Losowo wybrany student spośród rozważanej populacji ukończył terminowo studia. Obliczyć prawdopodobieństwo, że był on absolwentem liceum o kierunku biologiczno-chemicznym.

2.8 W hurtowni aptecznej znajduje się pewien lek pochodzący z trzech zakładów farmaceutycznych Z_1, Z_2, Z_3. Zapotrzebowanie pokrywane jest przez te zakłady, odpowiednio, w 40%, 40%, 20%. W transporcie (z zakładów do hurtowni) uszkodzeniu ulega, odpowiednio 2%, 3%, 1% opakowań leku.

(a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrane opakowanie będzie nieuszkodzone.

(b) Losowo wybrane opakowanie jest nieuszkodzone. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pochodzi ono z zakładu Z_2.

2.9 W pewnym laboratorium trzech analityków wykonuje te same oznaczenia, z tym jednak, że analityk pierwszy wykonuje 60% wszystkich oznaczeń, a pozostali dwaj wykonują po 20% oznaczeń. Analitycy pracują z różną starannością. W przypadku pierwszego z nich zachodzi potrzeba powtarzania oznaczenia przeciętnie 5 razy na 100 wykonanych analiz, w przypadku drugiego - 8 razy na 100, a w przypadku trzeciego - 2 razy na 100 wykonanych analiz. Losowo wybrana analiza wymaga powtórzenia. Obliczyć prawdopodobieństwo, że analizę tą wykonywał drugi analityk.

2.10 Do pewnego szpitala zgłasza się średnio 50% chorych na chorobę K, 30% na chorobę L i 20% chorobę M. Prawdopodobieństwo pełnego wyleczenia z choroby K jest równe 0,7 , z choroby L - 0,8 , a z choroby M - 0,9 . Wyleczony pacjent wypisuje się ze szpitala. Obliczyć prawdopodobieństwo, że cierpiał on na chorobę K.

2.11 Na oddział kardiochirurgiczny pewnego szpitala zgłasza się w roku przeciętnie 70 mężczyzn i 30 kobiet z pewną wadą serca. Prawdopodobieństwo pełnego wyleczenia dla mężczyzn jest równe 0,8, a dla kobiet 0,9. Wyleczony pacjent wypisuje się ze szpitala. Znaleźć prawdopodobieństwo, że był on:

(a) mężczyzną, **(b)** kobietą.

2.12 Na 100 mężczyzn w wieku 40-60 lat 18 choruje na nadciśnienie tętnicze, zaś na 200 kobiet w tym samym wieku choruje 11. Z grupy o jednakowej liczbie kobiet i mężczyzn wybrano losowo osobę, która jak się okazało ma podwyższone ciśnienie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna?

2.13 5% mężczyzn i 0,25% kobiet nie rozróżnia kolorów (daltonizm). Losowo wybrana osoba okazała się daltonistą. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrana osoba jest mężczyzną, jeśli losowano:

(a) z grupy osób, w której była równa liczba mężczyzn i kobiet,

(b) z grupy osób, w której było dwukrotnie więcej mężczyzn niż kobiet.

2.14 W pewnej populacji 10% mężczyzn i 15% kobiet ma podwyższony poziom cholesterolu. Wybrana losowo osoba miała podwyższony poziom cholesterolu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że była to kobieta, jeśli osobę tą wybrano z grupy osób w której:

(a) była równa liczba mężczyzn i kobiet,

(b) było 40% mężczyzn i 60% kobiet.

2.15 W pewnym województwie 20% osób tam zamieszkałych było palących. Prawdopodobieństwo śmierci na raka płuc w tym województwie wynosiło 0,006 i było 10-krotnie większe dla osób palących niż dla niepalących.

(a) Obliczyć prawdopodobieństwo śmierci na raka płuc dla osoby palącej.

(b) Chory zmarł na raka płuc. Obliczyć prawdopodobieństwo, że był osobą palącą.

2.16 Pewien test pozwalający wykryć chorobę nowotworową ma zarówno czułosc jak i specyficzność na poziomie 95%. Zakładając, że 0,4% osób całej populacji jest chorych obliczyć prawdopodobieństwo, że badana osoba jest chora, jeśli test dał wynik "pozytywny".

2.17 Czułość pewnego testu do wykrywania choroby X wynosi 95%, a specyficzność 1% Zakładając, że 0,5% osób całej populacji cierpi na tę chorobę, obliczyć prawdopodobieństwo, że badana osoba jest chora, jeśli badanie dało wynik "pozytywny".

2.18 W pewnym afrykańskim mieście 10% całej populacji było zarażonych wirusem HIV 1 a 5% - wirusem HIV 2. Stosowany test pozwalający wykryć nosicielstwo obu typów wirusa ma czułość 98% dla wirusa HIV 1 i 94% dla wirusa HIV 2 a specyficzność 96%. U badanej osoby test dał wynik "pozytywny". Obliczyć prawdopodobieństwo, że badana osoba była nosicielem wirusa HIV 1. Założyć, że chory nie mógł być równocześnie zarażony wirusem HIV 1 i HIV 2.

Odpowiedzi:

2.1 0

2.2 0,3

2.3 **(a)** $\frac{4}{5}$, **(b)** $\frac{1}{3}$

2.4 0,44

2.5 0,4

2.6 $\frac{81}{110}$

2.7 $\frac{6}{11} \approx 0{,}545$

2.8 **(a)** 0,978 , **(b)** 0,397

2.9 0,32

2.10 $\frac{5}{11}$

2.11 **(a)** 0,675 , **(b)** 0,325

2.12 $\frac{36}{47}$

2.13 **(a)** $\frac{20}{21}$, **(b)** $\frac{40}{41}$

2.14 **(a)** 0,6 , **(b)** 0,692

2.15 **(a)** $\frac{3}{140} \approx 0{,}0214$, **(b)** $\frac{5}{7} \approx 0{,}7143$

2.16 $\frac{19}{268}$

2.17 $\frac{95}{294}$

2.18 $\frac{98}{179} \approx 0{,}547$

3. ZMIENNE LOSOWE TYPU SKOKOWEGO

3.1 Zmienna losowa X przyjmuje wartości: $x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = 4$ z prawdopodobieństwami, odpowiednio: $p_1 = \frac{1}{3},\ p_2 = \frac{1}{4},\ p_3 = \frac{5}{12}$.

(a) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X i sporządzić jej wykres.

(b) Obliczyć $P(2 \le X \le 3)$, $P(X > 2)$.

(c) Oblicz $E(X)$ oraz $D^2(X)$.

(d) Oblicz $E(2X-1)$ oraz $D^2(2X-1)$.

3.2 Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorami

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\le 1 \\ \frac{1}{5} & \text{dla} \quad 1<x\le 2 \\ \frac{4}{5} & \text{dla} \quad 2<x\le 5 \\ 1 & \text{dla} \quad x>5 \end{cases}.$$

Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

3.3 Dany jest rozkład zmiennej losowej X typu skokowego $P(X = k) = Ck^2$, $k = 1, 2, 3, 4$.

(a) Wyznaczyć wartość stałej C.

(b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X.

(c) Obliczyć prawdopodobieństwa: $P\left(X \ge \frac{7}{2}\right)$, $P(2 < X < 5)$.

3.4 10-osobowa grupa studencka w której jest 6 studentek i 4 studentów otrzymała 3 bilety na występ. Bilety rozdziela się drogą losowania. Wartościami zmiennej losowej X są liczby studentek, które wylosowały bilety.

(a) Znaleźć rozkład zmiennej losowej X.

(b) Obliczyć $P(X > 1)$.

3.5 Pewna gra polega na rzucie dwiema kostkami. Gracz wygrywa 10 zł jeżeli suma oczek jest równa 2, wygrywa 5 zł jeżeli suma oczek wynosi 3 i przegrywa 1 zł (tzn. "wygrywa" – 1 zł) w każdym innym przypadku. Zmienna losowa X ma wartości równe wygranej w tej grze. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuantę zmiennej losowej X oraz obliczyć jej wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe.

3.6 Pewna gra polega na rzucie trzema monetami. Gracz wygrywa 10 zł w przypadku wyrzucenia trzech orłów, a przegrywa 6 zł (tzn. "wygrywa" –6 zł) w pozostałych przypadkach. Zmienna losowa X ma wartości równe wygranej w tej grze. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuantę zmiennej losowej X. Sporządzić wykres dystrybuanty. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

3.7 Pewna gra polega na rzucie monetą i kostką sześcienną. Gracz wygrywa 4 zł w przypadku pojawienia się reszki i jedynki, wygrywa 2 zł w przypadku pojawienia się orła lub liczby oczek podzielnej przez 2 i przegrywa 3 zł (tzn. "wygrywa"–3 zł) w pozostałych przypadkach.

(a) Podać zbiór zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu losowym.

(b) Podać rozkład zmiennej losowej X, której wartościami są liczby równe wygranej w tej grze.

(c) Obliczyć $E(X)$ i $\sigma = \sqrt{D^2(X)}$.

(d) Obliczyć $E(2-3X)$ i $D(2-3X)$.

3.8 Porównywano leki A i B stosowane dla stabilizowania częstości uderzeń serca pacjentów którzy przeszli atak serca. Niech X oznacza liczbę uderzeń serca na minutę pacjentów przyjmujących lek A, a Y – liczbę uderzeń serca na minutę pacjentów przyjmujących lek B. Dane są następujące rozkłady zmiennych losowych X i Y:

X:

x_i	40	60	68	70	72	80	100
p_i	0,01	0,04	0,05	0,8	0,05	0,04	0,01

Y:

x_i	40	60	68	70	72	80	100
p_i	0,4	0,05	0,04	0,02	0,04	0,05	0,4

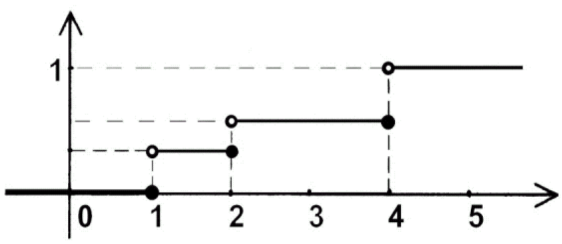
(a) Wyznaczyć i porównać wartości przeciętne liczby uderzeń serca pacjentów leczonych danymi lekami.

(b) Który z leków powoduje większą zmienność uderzeń serca – porównać $D^2(X)$ i $D^2(Y)$.

Odpowiedzi:

3.1 **(a)** $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 1 \\ \frac{1}{3} & \text{dla} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{12} & \text{dla} \quad 2 < x \le 4 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 4 \end{cases}$

Wykres dystrybuanty − Rys. 1



Rys. 1

(b) $\frac{1}{4}, \frac{5}{12}$

(c) 2,5;1,75

3.2 $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5;\quad p_1 = \frac{1}{5},\ p_2 = \frac{3}{5},\ p_3 = \frac{1}{5}.$

3.3 **(a)** $C = \frac{1}{30}$, **(b)** $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 1 \\ \frac{1}{30} & \text{dla} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{5}{30} & \text{dla} \quad 2 < x \le 3 \\ \frac{14}{30} & \text{dla} \quad 3 < x \le 4 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 4 \end{cases}$, **(c)** $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{6}$

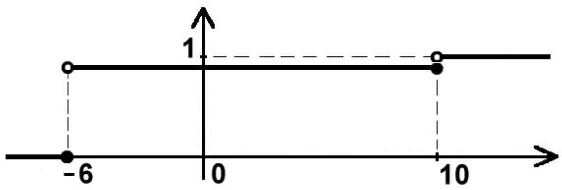
3.4 **(a)** $P(X = 0) = \frac{1}{30}$, $P(X = 1) = \frac{3}{10}$, $P(X = 2) = \frac{1}{2}$, $P(X = 3) = \frac{1}{6}$, **(b)** $\frac{2}{3}$

3.5 $P(X = -1) = \frac{33}{36}$, $P(X = 5) = \frac{2}{36}$, $P(X = 10) = \frac{1}{36}$; $E(X) = -\frac{13}{36}, \sigma = \frac{7}{3}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le -1 \\ \frac{33}{36} & \text{dla} \quad -1 < x \le 5 \\ \frac{35}{36} & \text{dla} \quad 5 < x \le 10 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 10 \end{cases}$$

3.6 $P(X = -6) = \frac{7}{8}$, $P(X = 10) = \frac{1}{8}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le -6 \\ \frac{7}{8} & \text{dla} \quad -6 < x \le 10 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 10 \end{cases}$$



Rys. 4

Wykres dystrybuanty F – Rys. 4

$E(X) = -4, D^2(X) = 28$

3.7 **(b)** $P(X = 4) = \frac{1}{12}$, $P(X = 2) = \frac{3}{4}$, $P(X = -3) = \frac{1}{6}$

(c) $E(X) = \frac{4}{3}$ $D^2(X) = \frac{73}{18}$ $\sigma \approx 2{,}01$

3.8 **(a)** $E(X) = E(Y) = 70$,

(b) $D^2(X) = 26{,}4$, $D^2(Y) = 730{,}32$

4. ROZKŁAD DWUMIANOWY I ROZKŁAD POISSONA

4.1 Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy o parametrach $n = 4$ i $p = 0{,}2$.

(a) Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.

(b) Obliczyć prawdopodobieństwa $P(X < 2)$ oraz $P(X > 1)$.

(c) Wyznaczyć $E(X)$, $D^2(X)$ i σ.

4.2 40% Polaków to blondyni. Niech X oznacza zmienną losową której wartościami są liczby równe liczbie blondynów w 4-osobowej rodzinie.

(a) Znaleźć rozkład zmiennej losowej X.

(b) Obliczyć $E(X)$, $D^2(X)$, $\sigma = \sqrt{D^2(X)}$ i $P(X > 2)$.

4.3 10% pewnej populacji to daltoniści. Wybrano losowo grupę 25 osób z tej populacji. Obliczyć prawdopodobieństwa, że daltonistami w tej grupie okaże się

(a) co najwyżej 5 osób,

(b) co najmniej 3 osoby.

4.4 Śmiertelność szczurów zarażonych pewną chorobą jest równa 60%. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na 20 zarażonych szczurów przeżyją co najwyżej 2.

4.5 W pewnym mieście na 105 nowonarodzonych chłopców rodzi się 100 dziewczynek. Znaleźć prawdopodobieństwo, że wśród 4 losowo wybranych noworodków

(a) jest 2 chłopców i 2 dziewczynki,

(b) wszystkie 4 noworodki są tej samej płci.

4.6 Prawdopodobieństwo postawienia nietrafnej diagnozy podczas wykonywania specjalistycznych badań chorych na pewną rzadką chorobę jest równe 0,05. Przebadano 50 pacjentów. Obliczyć prawdopodobieństwa, że nietrafna diagnoza zostanie postawiona dla:

(a) 3 pacjentów,

(b) co najmniej 2 pacjentów.

4.7 Pewien lek ma działanie niepożądane polegające na uszkodzeniu nerek u 1% pacjentów. Lek ten podano 50 pacjentom. Obliczyć prawdopodobieństwa, że:

(a) co najmniej 1 pacjent,

(b) co najwyżej 2 pacjentów

zostanie dotkniętych tym niepożądanym działaniem leku.

4.8 Pewien lek ma działanie niepożądane powodujące ostre podrażnienie wątroby u 5% pacjentów. Lek ten podano 120 pacjentom. Obliczyć prawdopodobieństwa, że

(a) co najmniej 2 pacjentów,

(b) 5 pacjentów

było dotkniętych tym niepożądanym działaniem podanego leku.

4.9 Pewien lek ma działanie niepożądane powodujące przesadną ospałość u 5% pacjentów. Lek ten podano 100 pacjentom. Obliczyć prawdopodobieństwa, że

(a) co najwyżej 2 pacjentów,

(b) co najmniej 1 pacjent

było dotkniętych tym niepożądanym działaniem podanego leku.

4.10 Działanie niepożądane pewnego leku polega na przejściowym zaburzeniu wzroku u około 10% pacjentów. Zakładając, że lek ten podano 40 pacjentom, obliczyć prawdopodobieństwa, że

(a) co najmniej 3 pacjentów,

(b) co najwyżej 1 pacjent

było dotkniętych tym niepożądanym działaniem podanego leku.

4.11 Zmienna losowa X ma rozkład Poissona o wartości przeciętnej $E(X)=4$. Obliczyć $P(X\geq 3)$.

4.12 Zmienna losowa X posiada rozkład Poissona z parametrem λ. Obliczyć prawdopodobieństwa

(a) $P(X\leq 2)$, $\lambda=1{,}5$

(b) $P(X>1)$, $\lambda=1{,}25$

(c) $P\left(\frac{3}{2}<X<\frac{9}{2}\right)$, $\lambda=3$

(d) $P(7\leq X<10)$, $\lambda=1{,}4$

4.13 Liczba cząsteczek emitowanych przez pewien radioaktywny materiał w ciągu sekundy podlega rozkładowi Poissona z parametrem λ = 1,7. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w ciągu sekundy wyemitowanych zostanie

(a) nie mniej niż 2 cząsteczki, **(b)** co najwyżej 3 cząsteczki.

4.14 Liczba X pacjentów przyjmowanych dziennie na oddział intensywnej opieki lekarskiej w pewnym szpitalu ma rozkład Poissona z wartością przeciętną równą 5. Obliczyć prawdopodobieństwo, że liczba pacjentów przyjętych na ten oddział pewnego dnia jest równa co najwyżej 2.

4.15 1% osób w pewnej populacji choruje na pewną chorobę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w grupie 200 losowo wybranych osób z tej populacji co najmniej 4 osoby chorują na tą chorobę. Zastosować Twierdzenie Poissona i porównać wynik z wynikiem otrzymanym przez zastosowanie rozkładu dwumianowego.

4.16 Prawdopodobieństwo urodzenia się trojaczków wynosi w przybliżeniu 0,001. Obliczyć prawdopodobieństwo urodzenia się jeden raz trojaczków na 700 urodzin w pewnym dużym szpitalu. Zastosować Twierdzenie Poissona i porównać wynik z wynikiem otrzymanym przez zastosowanie rozkładu dwumianowego.

4.17 2% osób w pewnej populacji ma wzrost powyżej 190 cm. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w grupie 300 osób wybranych losowo z tej populacji co najmniej 3 osoby będą wyższe niż 190 cm.

Odpowiedzi:

4.1 **(a)** $P(X=0)=0{,}4096$, $P(X=1)=0{,}4096$, $P(X=2)=0{,}1536$,

$P(X=3)=0{,}0256$, $P(X=4)=0{,}0016$

(b) 0,8192 , 0,1808

(c) $E(X)=0{,}8$, $D^2(X)=0{,}64$, $\sigma=0{,}8$

4.2 **(a)** $P(X=0)=0{,}1296$, $P(X=1)=0{,}3456$, $P(X=2)=0{,}3456$,

$P(X=3)=0{,}1536$, $P(X=4)=0{,}0256$

(b) $E(X)=1{,}6$, $D^2(X)=0{,}96$, $\sigma=0{,}98$, $P(X>2)=0{,}1792$

4.3 **(a)** 0,9666 , **(b)** 0,4629

4.4 0,0031

4.5 **(a)** 0,3746 , **(b)** 0,1254

4.7 **(a)** 0,3950 , **(b)** 0,9862

4.8 **(a)** 0,9845 , **(b)** 0,1634

4.9 **(a)** 0,1183 , **(b)** 0,9941

4.6 **(a)** 0,2199 , **(b)** 0,7206

4.10 **(a)** 0,7772 , **(b)** 0,0805

4.11 **0,7619**

4.13 **(a) 0,5067 , (b) 0,9069**

4.12 **(a) 0,8088 , (b) 0,3554 , (c) 0,6160 , (d) 0,0024**

4.14 **0,1247**

4.15 Rozkład dwumianowy

$$P(X \geq 4) = 1 - \binom{200}{0}\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^{200} - \binom{200}{1}\left(\frac{1}{100}\right)^1\left(\frac{99}{100}\right)^{199} -$$

$$- \binom{200}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^2\left(\frac{99}{100}\right)^{198} - \binom{200}{3}\left(\frac{1}{100}\right)^3\left(\frac{99}{100}\right)^{197} \approx 0{,}1420$$

Rozkład Poissona: $\lambda = 2$, $P(X \geq 4) \approx 0{,}1431$

4.16 Rozkład dwumianowy: $P(X = 1) = \binom{700}{1}(0{,}001)^1(0{,}999)^{699} \approx 0{,}3478$

Rozkład Poissona: $\lambda = 700 \cdot 0{,}001 = 0{,}7$, $P(X = 1) = \mathrm{e}^{-0{,}7} \cdot \frac{0{,}7}{1!} \approx 0{,}3476$

4.17 0,9380

5. ROZKŁAD NORMALNY I TWIERDZENIE MOIVRE'A-LAPLACE'A

5.1 Gęstość zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2+20x-100}{50}\right),\qquad -\infty<x<+\infty .$$

Znaleźć $E(X)$ i $D^2(X)$. **Uwaga**. $\exp x \overset{\text{DEF}}{=} \mathrm{e}^x$.

5.2 Gęstość zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2+8x-16}{8}\right),\qquad -\infty<x<+\infty .$$

Obliczyć prawdopodobieństwa **(a)** $P(X>5)$, **(b)** $P(3\le X\le 6)$.

5.3 Zmienna losowa X ma rozkład normalny o wartości przeciętnej 5 i odchyleniu standardowym 10. Obliczyć prawdopodobieństwa

(a) $P(2X>5)$, **(b)** P(-5<X<25).

5.4 Zmienna losowa X ma rozkład $N(1{,}5;2)$. Obliczyć prawdopodobieństwa:

(a) $P(X<2{,}5)$, **(b)** $P(X>-0{,}5)$, **(c)** $P(0{,}5<X<2)$,

5.5 Zmienna losowa X ma rozkład normalny o parametrach $\mu=10$, $\sigma=25$. Obliczyć

(a) P(5<X<25), **(b)** $P(X\ge 20)$, **(c)** $E(2X+5)$, $D^2(2X+5)$.

5.6 Zmienna losowa $X\sim N(100;15)$. Wyznaczyć k tak, by:

(a) $P(100\le X\le k)=0{,}4778$, **(b)** $P(X\ge k)=0{,}1093$.

5.7 Zmienna losowa $X\sim N(10;20)$. Wyznaczyć k tak, by:

(a) $P(X<k)=0{,}5987$, **(b)** $P(0<X<2k)=0{,}5328$.

5.8 Masa mózgu populacji dorosłych mężczyzn w pewnym województwie ma w przybliżeniu rozkład normalny o wartości przeciętnej 1400g i odchyleniu standardowym 100g. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że masa badanego mózgu jest

(a) większa niż 1325 g,

(b) zawarta pomiędzy 1475 g a 1600 g.

5.9 W pewnej populacji małp człekokształtnych objętość mózgu X ma w przybliżeniu rozkład normalny o wartości przeciętnej $1200\,\mathrm{cm}^3$ i odchyleniu standardowym $140\,\mathrm{cm}^3$.

(a) Obliczyć $P(920\le X\le 1060)$.

(a) Wyznaczyć taką wartość *k*, że 10% tych małp będzie miała objętość mózgu większą niż *k*.

5.10 Stężenie glukozy we krwi na czczo u cukrzyków podlega w przybliżeniu rozkładowi normalnemu o wartości przeciętnej 106 mg/dl i odchyleniu standardowym 8 mg/dl.

(a) Obliczyć $P(X \le 120\,\text{mg/dl})$.

(b) Jaki procent cukrzyków ma stężenie glukozy we krwi na czczo zawarte w przedziale od 90 do 120 mg/dl .

(c) Wyznaczyć taką wartość k, że 25% wszystkich cukrzyków ma stężenie glukozy we krwi na czczo mniejsze niż k.

5.11 W pewnej populacji młodych mężczyzn stężenie cholesterolu ma rozkład normalny o wartości przeciętnej 170 mg/dl i odchyleniu standardowym 30 mg/dl. Niech X oznacza stężenie cholesterolu dla losowo wybranego mężczyzny z tej populacji. Obliczyć:

(a) $P(X > 185)$, **(b)** P(170<X<210)

5.12 Ważnym wskaźnikiem pracy płuc jest jednosekundowa objętość wysilonego wydechu. W pewnej populacji wskaźnik ten jest zmienną losową (oznaczaną dalej X) o rozkładzie normalnym z wartością przeciętną μ = 3000 ml i odchyleniem standardowym ρ = 400 ml. Obliczyć:

(a) P(2900<X<3100) **(b)** $P(X > 3600)$.

5.13 Liczba bakterii pewnego typu w 1 ml wody pitnej podlega w przybliżeniu rozkładowi normalnemu o parametrach $\mu = 85$, $\sigma = 9$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrana próbka 1 ml wody zawiera więcej niż 100 bakterii.

5.14 Jaskra jest chorobą oczu której główną cechą jest podwyższone ciśnienie śródgałkowe zwane też ciśnieniem śródocznym. Rozkład ciśnienia śródgałkowego jest w przybliżeniu normalny o wartości przeciętnej 16 mm Hg i odchyleniu standardowym 3 mm Hg. Zakłada się, że prawidłowe ciśnienie śródgałkowe zawiera się w przedziale od 12 mm Hg do 20 mm Hg. Jaki procent całej populacji posiada prawidłowe ciśnienie śródgałkowe?

5.15 Wykonywany jest pomiar masy pewnej substancji bez błędów systematycznych. Błędy losowe pomiaru X podlegają rozkładowi normalnemu o odchyleniu standardowym σ = 20 g (μ = 0). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pomiar masy będzie przeprowadzony z błędem nie przekraczającym, co do wartości bezwzględnej 10 g.

5.16 Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego o parametrach n, p.

(a) Obliczyć prawdopodobieństwo $P(X = 6)$ dla

(1) $n = 20$, $p = 0{,}4$; **(2)** $n = 20$, $p = 0{,}5$.

(b) Stosując rozkład normalny obliczyć przybliżone wartości prawdopodobieństwa dla danych z pkt. **(a)** .

5.17 Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego o parametrach $n = 30$, $p = 0{,}6$. Stosując rozkład normalny obliczyć przybliżone wartości prawdopodobieństw:

(a) $P(X < 10)$, **(b)** $P(X \le 15)$, **(c)** $P(20 < X \le 25)$.

5.18 Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego o parametrach n, p. Stosując rozkład normalny obliczyć przybliżone wartości prawdopodobieństw:

(a) $n = 150$, $p = 0{,}42$; $P(X = 70)$,

(b) $n = 150$, $p = 0{,}42$; $P(60 \le X \le 70)$,

(c) $n = 200$, $p = 0{,}6$; $P(X > 130)$.

5.18 Rzucono 1200 razy monetą. Obliczyć prawdopodobieństwa, że liczba wyrzuconych orłów była:

(a) równa 560, **(b)** większa niż 600 i mniejsza niż 630.

5.19 W pewnej populacji przeciętnie co czwarty człowiek żyje dłużej niż 70 lat. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w losowo wybranej, z tej populacji, grupie 1000 osób liczba tych, którzy przeżyją więcej niż 70 lat będzie większa niż 200.

5.20 Prawdopodobieństwo urodzenia się chłopca wynosi 0,5. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 400 noworodków liczba dziewczynek będzie większa niż 195.

5.21 Prawdopodobieństwo tego, że krwinka biała jest obojętochłonna jest równe 0,6. Obliczyć prawdopodobieństwo, że liczba obojętochłonnych krwinek białych zawiera się pomiędzy 50 a 75 na każde 100 krwinek białych.

5.22 Długoletnie obserwacje dowiodły, że pewien defekt genetyczny zdarza się w 1 przypadku na 1000 nowonarodzonych dzieci. Obliczyć prawdopodobieństwa, że wśród 50 000 noworodków defektem tym dotknięte jest:

(a) 60 dzieci, **(b)** co najmniej 60 dzieci.

5.23 Efekty uboczne pewnego leku stosowanego w chorobie nadciśnieniowej dotykają 20% wszystkich pacjentów przyjmujących ten lek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że więcej niż 32 pacjentów, spośród 120 leczonych tym lekiem, będzie dotkniętych jego efektami ubocznymi.

Odpowiedzi: Odpowiedzi:

5.1 $E(X) = 10$, $D^2(X) = 25$

5.2 **(a)** 0,3085, **(b)** 0,5328

5.3 **(a)** 0,5987, **(b)** 0,8185

5.4 **(a)** 0,6915, **(b)** 0,8413, **(c)** 0,2902

5.5 **(a)** 0,3050, **(b)** 0,3446, **(c)** 25, 2500

5.6 **(a)** $k = 130{,}15$, **(b)** $k = 118{,}45$

5.7 **(a)** $k = 15$, **(b)** $k = 15$

5.8 **(a)** 0,7734, **(b)** 0,2039

5.9 **(a)** 0,1359, **(b)** $k = 1379{,}2$

5.10 **(a)** 0,9599, **(b)** 93,71% **(c)** $k = 100{,}64$

5.11 **(a)** 0,3085, **(b)** 0,4082, **(c)** 0,0027

5.12 **(a)** 0,1974, **(b)** 0,0668

5.13 0,0475

5.14 81,6%

5.15 0,3830

5.16 **(a)** 0,1244, 0,0370,

(b) 0,1212, 0,0372

5.20 0,9998

5.21 0,6736

5.17 **(a)** 0,0008 , **(b)** 0,1762 , **(c)** 0,1736

5.18 **(a)** 0,0326 , **(b)** 0,6115 , **(c)** 0,0643

5.19 **(a)** 0,0017 , **(b)** 0,4434

5.22 0,9830

5.23 **(a)** 0,0220 , **(b)** 0,0901

5.24 0,0262

6. ESTYMACJA PUNKTOWA I PRZEDZIAŁOWA

6.1 Obliczyć $\bar{x}$, s, s^2 dla następujących (fikcyjnych) prób:

(a)	7	18	19	10	12				
(b)	−2	7	−3	5	6	4			
(c)	1,7	2,3	1,9	2,0	2,4	1,7	1,8	1,9	1,5

6.2. Ciśnienie skurczowe (systoliczne) krwi w warunkach prawidłowych u osób dorosłych w średnim wieku wynosi 100 – 140 mm Hg. 12 pacjentów z wysokim systolicznym ciśnieniem krwi brało udział w badaniach nad efektywnością nowego leku w obniżaniu tego ciśnienia. W tabelce poniżej podane są pomiary ciśnienia krwi przed i po 4 tygodniowym okresie leczenia nadciśnienia nowym lekiem.

Ciśnienie krwi w mm Hg

Pacjent	Przed	Po
1	170	152
2	168	143
3	207	182
4	182	190
5	195	170
6	203	157
7	167	180
8	172	168
9	208	198
10	152	163
11	173	173
12	185	180

Wyznaczyć średnią, odchylenie standardowe i wariancję **zmiany** ciśnienia krwi, tj., różnic $d_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, \ldots, 12$, gdzie x_i, y_i oznaczają poziomy ciśnienia, odpowiednio, przed i po okresie leczenia nowym lekiem.

6.3 Z populacji generalnej pobrana została 50 elementowa próba. Obserwacje pewnej cechy X na tej próbie są następujące:

2,1	4,4	2,7	32,5	9,9	9,0	2,0	6,6	3,9	1,6
14,7	9,6	16,7	7,4	8,2	19,2	6,9	4,3	3,3	1,2
4,1	18,4	0,2	6,1	13,5	7,4	0,2	8,3	0,3	1,3
14,1	1,0	2,4	2,4	18,0	8,7	24,0	1,4	8,2	5,8
1,6	3,5	11,4	18,0	26,7	3,7	12,6	23,1	5,6	0,4

(a) Wyznaczyć średnią, odchylenie standardowe i wariancję z próby, tj. $\bar{x}$, s, s^2.

(b) Utworzyć szereg rozdzielczy, a następnie wyznaczyć $\bar{x}$, s, s^2 z tego szeregu.

Wskazówki. 1. Orientacyjną liczbę klas wyznaczamy ze wzoru: $1 + 3{,}3 \log n$, gdzie n jest licznością próby.

2. Orientacyjna długość klasy: $\dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{l}$, l – liczba klas .

3. Jeśli $x_1^0, \dots, x_l^0$ są środkami klas, a $n_1, \dots, n_l$ - licznościami klas, to

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{l} n_i \cdot x_i^0} \qquad \boxed{s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{l} n_i \left(x_i^0 - \bar{x} \right)^2}$$

6.4 Częścią pewnych badań farmaceutycznych było kontrolowanie wagi ciała zwierząt doświadczalnych. Poniżej podane są wagi ciała (w gramach) użytych w badaniach 50 szczurów:

136	92	115	118	121	137	132	120	104	125
119	115	101	129	87	108	110	133	135	126
127	103	110	126	118	82	104	137	120	95
146	126	119	119	105	132	126	118	100	113
106	125	117	102	146	129	124	113	95	148

(a) Pogrupować te dane w klasach:

79,5 – 89,5 ;   89,5 – 99,5 ; 99,5 – 109,5 ; 109,5 – 119,5 ;

119,5 – 129,5 ;   129,5 – 139,5 ;   139,5 – 149,5 .

(b) Wyznaczyć $\bar{x}$, s , s^2 bezpośrednio z próby oraz z szeregu otrzymanego w pkt (a).

6.5 Wybrano losowo 100 mężczyzn z pewnej populacji, a następnie zmierzono ich wzrost (w cm). Obserwacje (wyniki pomiarów wzrostu) zapisano w postaci następującego szeregu

Wzrost (klasy)	**Liczba mężczyzn (częstości n_i)**
$\langle 154 ; 158)$	10
$\langle 158 ; 162)$	14
$\langle 162 ; 166)$	26
$\langle 166 ; 170)$	28
$\langle 170 ; 174)$	12
$\langle 174 ; 178)$	8
$\langle 178 ; 182)$	2

Wyznaczyć $\bar{x}$, s , s^2 .

6.6 Wyznaczyć średnią, odchylenie standardowe i wariancję z następującej (fikcyjnej) próby, pogrupowanej w klasach

x_i	n_i
$\langle 0 ; 4)$	17
$\langle 4 ; 8)$	23
$\langle 8 ; 12)$	15
$\langle 12 ; 16)$	11
$\langle 16 ; 20)$	8
$\langle 20 ; 24)$	6

6.7 W poniższej tabelce obserwacje (fikcyjnej) próby są pogrupowane w jedno-wartościowych klasach:

Klasy	**Częstości**
0	12
1	40
2	30
3	15
4	3

Wyznaczyć $\bar{x}$, s, s^2.

6.8 Dane są następujące obserwacje pewnej cechy X:

1	0	3	2	3	5	3	0	2	7
0	4	3	1	3	1	5	3	4	4
2	1	3	1	2	2	1	0	2	0
0	1	1	2	4	5	3	4	3	4
3	3	5	2	1	6	1	2	4	6

(a) Pogrupować dane obserwacje w jedno-wartościowych klasach.

(b) Wyznaczyć $\bar{x}$, s, s^2.

6.9 Dane są następujące liczby mikroorganizmów w 100 próbkach wody z pewnego zbiornika

Liczba mikroorganizmów w próbce wody	**Częstości**
0	15
1	30
2	25
3	20
4	5
5	4
6	1

Wyznaczyć $\bar{x}$, s, s^2.

6.10 Cecha X ma w danej populacji generalnej rozkład normalny o odchyleniu standardowym $\sigma = 7{,}2$. Z populacji pobrano 64 elementową próbę i wyznaczono średnią $\bar{x}$ = 70,5 obserwacji cechy X.

(a) Wyznaczyć przedziały ufności dla wartości przeciętnej cechy X na poziomie ufności:
(i) $1-\alpha = 0{,}90$, **(ii)** $1-\alpha = 0{,}95$, **(iii)** $1-\alpha = 0{,}99$.

(b) Wyjaśnić zmianę długości przedziału ufności wraz ze zmianą poziomu ufności.

6.11 Cecha X ma w danej populacji generalnej rozkład $N(\mu$; 4,45). Pobrano próbę z tej populacji i wyznaczono średnią obserwacji cechy X: $\bar{x}$ = 30,82 .

(a) Wyznaczyć 95% (tj. na poziomie ufności 0,95), przedział ufności dla wartości przeciętnej cechy X przy założeniu, że:
(i) $n = 36$, **(ii)** $n = 64$, **(iii)** $n = 100$.

(b) Wyjaśnić zmianę długości przedziału ufności wraz ze zmianą liczności próby.

6.12 W pewnym eksperymencie chemicznym bada się ilość substancji wydzielającej się w toku doświadczenia. Przeprowadzono 26 niezależnych doświadczeń i otrzymano w nich następujące wyniki (w mg):

285	339	439	262	372	149	275	452	320	460	392	272	263
379	309	358	416	454	400	315	373	370	203	505	372	249

Przyjmując rozkład ilości wydzielonej substancji za normalny o odchyleniu standardowym $\sigma = 90$, wyznaczyć przedział ufności dla niewiadomej wartości przeciętnej. Przyjąć poziom ufności:

(a) $1-\alpha = 0{,}95$, **(b)** $1-\alpha = 0{,}99$.

6.13 W związku z zapotrzebowaniem Banku Krwi przeprowadzono w wybranej losowo grupie 500 kandydatów na honorowych dawców badanie częstości występowania grupy krwi A oraz B. Okazało się, że 200 osób ma grupę krwi A, natomiast 93 grupę B. Na poziomie ufności 0,9 zbuduj przedziały dla częstości występowania tych grup krwi.

6.14 Z 20000 osób zamieszkujących rejon objęty działaniem przychodni rejonowej wylosowano 2500 osób, wśród których 655 zachorowało na grypę. Zbuduj 95% przedział ufności dla frakcji chorujących na grypę w badanej populacji.

6.15 W 10-osobowej losowo wybranej grupie studentów zmierzono czas rozwiązywania pewnego problemu matematycznego. Otrzymano następujące wyniki (w minutach):

25 16 12 10 12 21 25 20 18 15

Na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}90$ wyznaczyć przedział ufności dla wartości przeciętnej czasu rozwiązywania tego problemu. Zakładamy, że rozkład czasu rozwiązywania problemu jest normalny.

6.16 W pewnym doświadczeniu farmakologicznym bada się stężenie kreatyniny we krwi królików. Dokonano 9 oznaczeń na wylosowanych zwierzętach. Otrzymano następujące wyniki (w odpowiednich jednostkach):

2,0 1,7 1,8 1,2 1,5 1,4 2,0 1,2 1,6

Na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}99$ wyznaczyć przedział ufności dla wartości przeciętnej stężenia kreatyniny. Wartości stężenie kreatyniny we krwi królików podlegają rozkładowi normalnemu.

6.17 Zmierzono zawartość witaminy C w 17 próbkach soku pomidorowego. Otrzymano następujące wartości (w mg na 100 g soku):

16	22	20	23	21	19	15	13	23
17	20	29	18	22	16	25	20	

Na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}99$ wyznaczyć przedział ufności dla przeciętnej zawartości witaminy C. Zakładamy, że zawartość witaminy C w soku pomidorowym ma rozkład normalny.

6.18 W celu oszacowania przeciętnej wartości czasu poświęcanego tygodniowo przez studentów pewnej uczelni na studiowanie w czytelni bibliotecznej, wylosowano niezależnie próbę 132 studentów i otrzymano następujące wyniki (w godzinach):

Czas	**Liczba studentów**
$\langle 0 ; 2)$	10
$\langle 2 ; 4)$	28
$\langle 4 ; 6)$	42
$\langle 6 ; 8)$	30
$\langle 8 ; 10)$	15
$\langle 10 ; 12)$	7

Na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}90$ wyznaczyć przedział ufności dla przeciętnej wartości czasu studiowania w czytelni w ciągu tygodnia.

6.19 W badaniach nad przypadkami pewnej rzadkiej choroby wyznaczono rozkład wieku chorych na obszarze występowania choroby w ciągu 1 roku. Obserwacje pogrupowano w klasach w następujący sposób:

Wiek w latach	**Liczba chorych**
$\langle 5 ; 14)$	5
$\langle 15 ; 24)$	10
$\langle 25 ; 34)$	20
$\langle 35 ; 44)$	22
$\langle 45 ; 54)$	13
$\langle 55 ; 64)$	5

Wyznaczyć 90% i 95% przedziały ufności dla wartości przeciętnej wieku chorych.

6.20 Obserwacje cechy X na 60 elementowej próbie wylosowanej z populacji generalnej pogrupowano w klasach jak poniżej:

Klasy	**Częstości**
4,5 – 9,5	2
9,5 – 14,5	4
14,5 – 19,5	10
19,5 – 24,5	18
24,5 – 29,5	16
29,5 – 34,5	6
34,5 – 39,5	4

Na poziomach ufności $1-\alpha=0{,}95$ i $1-\alpha=0{,}99$ wyznaczyć przedziały ufności dla wartości przeciętnej rozkładu cechy X.

6.21 Wylosowano 50 studentów spośród studentów którzy zdali egzamin z matematyki. Liczby uzyskanych przez nich punktów z przedmiotu w całym semestrze były następujące:

69	68	53	51	86	68	94	53	75	56
85	68	50	70	50	90	53	76	53	50
61	60	68	62	78	83	50	99	69	69
84	50	86	92	52	70	63	97	67	54
59	79	76	75	55	74	73	70	71	95

(a) Na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ wyznaczyć przedział ufności dla wartości przeciętnej liczby punktów z przedmiotu.

(b) Pogrupować dane w klasach:

49,5 – 59,5   59,5 – 69,5   69,5 – 79,5   79,5 – 89,5   89,5 – 99,5

a następnie wyznaczyć przedział ufności dla wartości przeciętnej liczby punktów. Zakładany poziom ufności $1-\alpha=0{,}95$. Porównać otrzymany wynik z wynikiem otrzymanym w pkt. **(a)**.

6.22 W pewnej populacji cecha X ma rozkład normalny. Z populacji tej wylosowano próbę o liczności n, wyznaczono obserwacje cechy X na tej próbie i obliczono wariancję (z próby) $s^2 = 17$. Wyznaczyć 95% przedział ufności dla wariancji przy założeniu, że:

(a) $n = 10$,   **(b)** $n = 16$,   **(c)** $n = 22$.

Wyjaśnić zmiany w przedziale ufności wraz ze zmianą liczności próby.

6.23 Dla zbadania cechy X wylosowano 20 elementową próbę i wyznaczono obserwacje cechy X na elementach tej próby oraz wariancję (z próby) $s^2 = 25$. Wyznaczyć przedział ufności dla wariancji przyjmując następujące poziomy ufności:

(a) $1-\alpha=0{,}90$,   **(b)** $1-\alpha=0{,}95$,   **(c)** $1-\alpha=0{,}99$.

Wyjaśnić zmiany w przedziale ufności wraz ze zmianą poziomu ufności. Zakładamy, że rozkład cechy jest normalny.

6.24 Wykonano oznaczenia hemoglobiny 16 zwierząt narażonych na zatrucie związkami chemicznymi. Otrzymano następujące wartości:

15,6	14,8	14,4	16,6	13,8	14,0	17,3	17,4
18,6	16,2	14,7	15,7	16,4	13,9	14,8	17,5

Wyznaczyć 90% i 98% przedziały ufności dla wariancji i odchylenia standardowego. Wartości oznaczeń hemoglobiny podlegają rozkładowi normalnemu.

6.25 Czas trwania pewnej reakcji chemicznej jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Dokonano 10 pomiarów czasu trwania tej reakcji i otrzymano następujące wyniki (w sekundach):

80	84	78	79	82	84	81	77	82	80

Na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ wyznaczyć przedziały ufności dla:

(a) wartości przeciętnej, **(b)** odchylenia standardowego.

6.26 Dla zbadania rozkładu cechy X wylosowano 100 elementową próbę z populacji generalnej, wyznaczono obserwacje cechy X a następnie pogrupowano je w klasach jak następuje:

Klasy	**Częstości**
11 – 13	6
13 – 15	14
15 – 17	50
17 – 19	15
19 – 21	10
21 – 23	5

Na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ wyznaczyć przedziały ufności dla odchylenia standardowego i wariancji cechy X.

6.27 W celu oszacowania udziału kredytobiorców zalegających ze spłatą zadłużenia personel banku wylosował próbę 120 kont kredytobiorców stwierdzając, że opóźnienia w spłacie kredytu nastąpiło w 33 przypadkach. Zbuduj 95% przedział ufności dla frakcji kredytobiorców zalegających ze spłatą zadłużenia.

6.28 Fabryka zakupiła nowe urządzenie do produkcji opakowań leków. Wylosowano 500 wyprodukowanych przez tę maszynę opakowań i okazało się, że 20 z nich nie spełnia norm. Zbuduj 95% przedział ufności dla wadliwości. Jak liczną próbę należałoby pobrać, aby móc oszacować przedziałowo wadliwość z dokładnością do 1%?

Odpowiedzi:

6.1 **(a)** $\bar{x} = 13{,}2$, $s \approx 5{,}17$, $s^2 = 26{,}7$

(b) $\bar{x} \approx 2{,}83$, $s \approx 4{,}26$, $s^2 \approx 18{,}17$

(c) $\bar{x} \approx 1{,}91$, $s \approx 0{,}29$, $s^2 \approx 0{,}08$

6.2 $\bar{d} = 10{,}5$, $s_D \approx 17{,}80$, $s_D^2 \approx 317$

6.3 (a) $\bar{x} \approx 8{,}37$, $s \approx 7{,}68$, $s^2 \approx 59{,}04$

(b) Przy podziale na 7 klas o długości 5: $\langle 0 ; 5)$, . . . , $\langle 30 ; 35)$

mamy $n_1 = 22$, $n_2 = 14$, $n_3 = 5$, $n_4 = 5$, $n_5 = 2$, $n_6 = 1$, $n_7 = 1$.

Wtedy $\bar{x} = 8{,}3$, $s \approx 7{,}31$, $s^2 \approx 53{,}43$

6.4 (a) **TABELKA**

Klasy	**Częstości**
79,5 – 89,5	2
89,5 – 99,5	3
99,5 – 109,5	9
109,5 – 119,5	13
119,5 – 129,5	13
129,5 – 139,5	7
139,5 – 149,5	3

(b) Bezpośrednio z próby:

$\bar{x} = 117{,}88$, $s \approx 15{,}15$, $s^2 \approx 229{,}37$

Z szeregu:

$\bar{x} = 117{,}5$, $s \approx 14{,}46$, $s^2 \approx 209{,}18$

6.5 $\bar{x} = 166$, $s \approx 5{,}81$, $s^2 \approx 33{,}78$

6.6 $\bar{x} = 9{,}40$, $s \approx 6{,}14$, $s^2 \approx 37{,}71$

6.7 $\bar{x} = 1{,}57$, $s \approx 0{,}99$, $s^2 \approx 0{,}97$

6.8 (a) **TABELKA**

Obserwacje	**Częstości**
0	6
1	10
2	9
3	11
4	7
5	4
6	2
7	1

(b) $\bar{x} = 2{,}56$, $s \approx 1{,}75$, $s^2 \approx 3{,}07$

6.9 $\bar{x} = 1{,}86$, $s \approx 1{,}35$, $s^2 \approx 1{,}82$

6.10 (a) **(i)** (69,02 ; 71,98) , **(ii)** (68,75 ; 72,26) , **(iii)** (68,18 ; 72,82)

6.11 (a) **(i)** (29,37 ; 32,27) , **(ii)** (29,73 ; 31,91) , **(iii)** (29,95 ; 31,69)

6.12 (a) (310,91 ; 380,09) , **(b)** (299,96 ; 391,04)

6.13

6.14

6.15 (14,31 ; 20,49)

6.16 (1,26 ; 1,94)

6.17 (17,12 ; 22,76)

6.18 (5,14 ; 5,86)

6.19 90% : (32,78 ; 37,68) , 95% : (32,30 ; 38,16)

6.20 0,95 : (21,56 ; 25,10) , 0,99 : (21,00 ; 25,60)

6.21 **(a)** $\bar{x} = 69{,}18$, $s \approx 14{,}27$, μ : (65,22 ; 73,14)

(b) $\bar{x} = 69{,}5$, $s \approx 13{,}44$, μ : (65,77 ; 73,23)

6.22 **(a)** (8,04 ; 56,67) , **(b)** (9,28 ; 40,73) , **(c)** (10,06 ; 34,73)

6.23 **(a)** (15,76 ; 46,94) , **(b)** (14,46 ; 53,31) , **(c)** (12,31 ; 69,44)

6.24 90% σ^2 : (1,31 ; 4,50) , σ : (1,14 ; 2,12)
98% σ^2 : (1,07 ; 6,25) , σ : (1,03 ; 2,50)

6.25 $\bar{x} = 80{,}7$, $s \approx 2{,}36$, $s^2 \approx 5{,}57$, μ : (79,01 ; 82,39) , σ : (1,62 ; 4,31)

6.26 σ : (2,03 ; 2,68) , σ^2 : (4,12 ; 7,18)

6.27

6.28

7. WERYFIKACJA HIPOTEZ DLA JEDNEJ ZMIENNEJ

7.1a Dana jest próba losowe – obserwacje cechy *X*. Stosując test Shapiro-Wilka zweryfikować przypuszczenie, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, że cecha *X* ma rozkład normalny.
Obserwacje cechy *X*: 154, 438, 374, 305, 434, 453, 466, 551, 250, 190.

7.1b Obserwacje cechy X : 416, 400, 373, 203, 372, 285, 263, 309
Poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

7.2 Cecha *X* w populacji generalnej ma rozkład $N(\mu;5)$. Dla dowodu, że wartość przeciętna cechy *X*: $\mu \neq 30$, pobrano z populacji próbę o liczności $n = 36$ i wyznaczono średnią z obserwacji cechy *X* na tej próbie: $\bar{x} = 32$. Sformułować i przetestować odpowiednie hipotezy statystyczne na poziomie istotności:

(a) $\alpha = 0{,}10$; **(b)** $\alpha = 0{,}05$; **(c)** $\alpha = 0{,}01$.

Wyjaśnić wpływ zmiany poziomu istotności na podjęte decyzje kończące proces weryfikacji hipotez.

7.3 Cecha X ma rozkład $N(\mu;10)$. Postawiono następujące hipotezy dotyczące wartości przeciętnej μ cechy X

$$H_0 : \mu = 95 , \qquad H_1 : \mu > 95 .$$

Dla weryfikacji postawionych hipotez na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, z populacji generalnej pobrano próbę o liczności n i wyznaczono średnią z obserwacji cechy *X* na tej próbie: $\bar{x} = 100$. Zakładając, że

(a) $n = 9$, **(b)** $n = 16$,

zweryfikować postawione hipotezy i wyjaśnić wpływ zmiany liczności próby na podjęte decyzje.

7.4 W pewnej populacji kobiet w średnim wieku ciśnienie skurczowe krwi (w mm Hg) ma rozkład normalny o odchyleniu standardowym σ = 20 mm Hg i nieznanej wartości przeciętnej. Średnia z obserwacji ciśnienia krwi na próbie losowej 100 kobiet z tej populacji jest równa $\bar{x} = 135$ mm Hg. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować przypuszczenie, że wartość przeciętna ciśnienia krwi w tej populacji jest mniejsza niż 138 mm Hg.

7.5 Odchylenie standardowe długości czasu snu, w minutach na dobę, pacjentów pewnego szpitala wynosi 70. Wylosowano 16 pacjentów, zmierzono długości ich czasów snu i otrzymano następujące wyniki:

435	533	393	458	525	481	324	437
348	503	383	395	416	553	500	488

Czy można twierdzić, że przeciętna długość czasu snu jest równa 8 godz. Sformułować i zweryfikować odpowiednie hipotezy na poziomie istotności:
(a) $\alpha = 0{,}10$; **(b)** $\alpha = 0{,}05$.

7.6 Cecha X ma w danej populacji rozkład normalny o parametrach μ, σ. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezy

$$H_0 : \mu = 16, \qquad H_1 : \mu \neq 16,$$

jeśli średnia i odchylenie standardowe z próby o liczności 25 wynoszą odpowiednio $\bar{x} = 18$, $s = 6{,}5$.

7.7 Cecha $X \sim N(\mu;\sigma)$. Z populacji pobrano próbę o liczności $n = 16$ i wyznaczono $\bar{x} = 115$ $s = 12$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezy

$$H_0 : \mu = 105, \qquad H_1 : \mu > 105.$$

7.8 Z pewnej populacji pobrano próbę i wyznaczono wartości badanej cechy X. Otrzymano następujące wyniki:

1,4 3,6 1,7 2,0 3,3 2,8 2,9

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}10$ zweryfikować przypuszczenie, że wartość przeciętna cechy X jest różna od 3.

7.9 Pewien pacjent przeszedł serię ośmiu niezależnych testów na całkowite stężenie protein zawartych we krwi. Wiadomo, że całkowite stężenie protein nie może być ani za duże ani za małe i dla osoby zdrowej (dorosłej) wynosi przeciętnie 7,25 (w odpowiednich jednostkach). Uzyskano następujące wyniki testów:

7,23 7,25 7,28 7,29 7,32 7,26 7,27 7,27

Sformułować odpowiednie hipotezy dla wartości przeciętnej i zweryfikować je na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

7.10 Wykonano 10 pomiarów czasu trwania tej reakcji i otrzymano następujące wyniki (w sekundach):

80 84 78 79 82 84 81 77 82 80

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować przypuszczenie, że przeciętny czas trwania tej reakcji jest:

(a) różny od 83, **(b)** mniejszy od 83.

7.11 Dla sprawdzenie przypuszczeń co do wartości przeciętnej cechy X pobrano 81 – elementową próbę z populacji i wyznaczono $\bar{x} = 76$, $s = 15$. Na poziomie istotności:

(a) $\alpha = 0{,}01$, **(b)** $\alpha = 0{,}05$, **(c)** $\alpha = 0{,}10$,

zweryfikować hipotezy $H_0 : \mu = 73$, $H_1 : \mu > 73$.

7.12 Grupę 60 dzieci poddano badaniom na poziom inteligencji. Wyniki badań pogrupowano w klasach jak poniżej

Poziom inteligencji	**Liczba dzieci**
80 – 89	4
90 – 99	1
100 – 109	9
110 –119	23
120 –129	11
130 – 139	7
140 – 149	5

Czy wyniki te uzasadniają przypuszczenie, że wartość przeciętna poziomu inteligencji w badanej populacji dzieci jest różna od 120? Sformułować i zweryfikować odpowiednie hipotezy statystyczne. Zakładany poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

7.13 Zbadano stężenie cukru we krwi na czczo w grupie 100 dzieci. Otrzymano następujące wyniki (pogrupowane w klasach) w mg/100 ml krwi:

Stężenie cukru	**Liczba dzieci**
55 – 59	16
60 – 64	20
65 – 69	34
70 – 74	15
75 – 79	10
80 – 84	5

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę $H_0 : \mu = 62$ wobec hipotezy $H_1 : \mu > 62$.

7.14 Dla dowodu prawdziwości twierdzenia, że wartość przeciętna wzrostu mężczyzn w pewnej populacji jest istotnie różna od 170 cm, wybrano losowo grupę 100 mężczyzn i zmierzono ich wzrost. Otrzymano następujące wyniki:

Wzrost	**Liczba mężczyzn**
$\langle 154 ; 158)$	10
$\langle 158 ; 162)$	14
$\langle 162 ; 166)$	26
$\langle 166 ; 170)$	28
$\langle 170 ; 174)$	12
$\langle 174 ; 178)$	8
$\langle 178 ; 182)$	2

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować odpowiednie hipotezy statystyczne.

7.15 Z populacji pobrano 10-elementową próbę, a następnie wyznaczono obserwacje cechy X na tej próbie. Otrzymano następujące wyniki:

7,32 7,05 7,20 7.85 6,90 7,50 7,95 6,82 7,38 7,55

Na poziomie istotności: **(a)** $\alpha = 0{,}01$, **(b)** $\alpha = 0{,}05$, **(c)** $\alpha = 0{,}10$,
zweryfikować hipotezę, że wariancja cechy X jest większa od 0,08 . Cecha X ma w danej populacji rozkład normalny.

7.16 W pewnym doświadczeniu farmakologicznym badano efekt podania pewnego preparatu na przedłużenie narkozy u zwierząt doświadczalnych. Z populacji zwierząt poddawanych doświadczeniom wybrano losowo 8 zwierząt i wyznaczono dla nich czasy przedłużeń narkozy (w minutach). Otrzymano następujące wartości:

6 7 2 10 7 3 5 4

Na poziomie istotności: **(a)** $\alpha = 0{,}01$, **(b)** $\alpha = 0{,}05$, **(c)** $\alpha = 0{,}10$,
zweryfikować przypuszczenie, że wariancja czasu przedłużenia narkozy jest różna od 7. Rozkład czasu przedłużenia narkozy jest normalny.

7.17 Producent pewnego instrumentu pomiarowego twierdzi, że przy posługiwaniu się tym instrumentem rozrzut błędów pomiarów jest na tyle mały, że odchylenie standardowe nie przekracza 0,02 jednostek miary. Dla sprawdzenia twierdzeń producenta wykonano 12 niezależnych pomiarów tej samej wielkości w takich samych warunkach i otrzymano następujące wyniki:

5,03 5,04 5,05 5,04 5,02 5,03 5,07 5,00 5,04 5,01 5,01 5,06

Sformułować i zweryfikować odpowiednie hipotezy statystyczne. Przyjąć poziom ufności $\alpha = 0{,}01$. Zakładamy, że wyniki pomiarów podlegają rozkładowi normalnemu.

7.18 Test psychologiczny polegał na określeniu liczby zapamiętanych elementów pewnego rysunku. Wybrano losowo 12 dzieci szkolnych, i poddano je temu testowi. Otrzymano następujące wyniki:

32 30 34 25 38 20 28 33 32 40 35 29

Na poziomie istotności: **(a)** $\alpha = 0{,}05$, **(b)** $\alpha = 0{,}10$,
zweryfikować hipotezę, że odchylenie standardowe liczby zapamiętanych elementów w populacji dzieci szkolnych jest większe niż 5. Zakładamy, że liczba zapamiętanych elementów podlega rozkładowi normalnemu.

7.19 Dla zbadaniu rozkładu cechy X, wylosowano z populacji 100 elementów i wyznaczono obserwacje cechy X na tej próbie. Otrzymano następujące wyniki (pogrupowane w klasach):

Przedziały	11 – 13	13 – 15	15 – 17	17 – 19	19 – 21	21 – 23
Częstości	6	14	30	30	13	7

Zakładając, że rozkład cechy X jest normalny zweryfikować hipotezę, że wariancja X jest większa niż 5. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0,05$.

7.20 Wzrost mężczyzn w pewnej populacji podlega rozkładowi normalnemu. Dla zbadania wariancji rozkładu wylosowano próbę 100 mężczyzn, wyznaczono ich wzrost, a wyniki pogrupowano w klasach jak poniżej w tabelce:

Wzrost	**Liczba mężczyzn**
154 – 158	10
158 – 162	14
162 – 166	26
166 – 170	28
170 – 174	12
174 – 178	8
178 – 182	2

Na poziomie istotności: **(a)** $\alpha = 0,01$, **(b)** $\alpha = 0,05$,
zweryfikować przypuszczenie, że wariancja jest różna od 25.

7.21 W punkcie szczepień 400 osobom podano szczepionkę i u 154 zaobserwowano odczyn dodatni. Na poziomie istotności 0,1 zweryfikować hipotezę, że więcej niż 35% osób reaguje na tę szczepionkę dodatnio.

7.22 Prowadzono badania dotyczące ściągania na egzaminach. Z populacji wszystkich studentów wylosowano próbę 250 osób i okazało się, że 8 osób ściągało. Na poziomie istotności 0,01 zweryfikuj hipotezę, że procent ściągających w populacji nie przekracza 4%.

7.23 Partia polityczna X twierdzi, że ma ponad 35% poparcie. Wylosowano 1200 respondentów, z których 450 popierało partię X. Na poziomie istotności 0,1 zweryfikuj prawdziwość tego stwierdzenia.

Odpowiedzi:

7.1a $s \approx 131,05$. Wartość stat. test. $w \approx 0,938$. Obsz. kryt. $K = \langle 0; 0,842 \rangle$.
Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że cecha X ma rozkład normalny

7.1b $s \approx 74,59$. Wartość stat. test. $w \approx 0,938$. Obsz. kryt. $K = \langle 0; 0,818 \rangle$.
Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że cecha X ma rozkład normalny

7.2 Wartość stat. test. $u = 2,4$.

(a) Obsz. kryt.: $K = (-\infty; -1,64\rangle \cup \langle 1,64; +\infty)$. H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1.

(b) Obsz. kryt.: $K = (-\infty; -1,96\rangle \cup \langle 1,96; +\infty)$. H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1.

(c) Obsz. kryt.: $K = (-\infty; -2,58\rangle \cup \langle 2,58; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

7.3 Obsz. kryt.: $K = \langle 1,64 ; +\infty)$. Wartość stat. test. $u = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

(a) Nie ma podstaw do odrzucenia H_0. **(b)** H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1.

7.4 $H_0: \mu = 138$, $H_1: \mu < 138$, $u = -1,5$, $K = (-\infty; -1,64\rangle$.

Nie ma podstaw do przypuszczenia, że wartość przeciętna skurczowego ciśnienia krwi jest mniejsza niż 138 mm Hg.

7.5 I etap Sprawdzenie zgodności z rozkładem normalnym: $s^2 \approx 4629,6667$. Wartość stat. test. $w \approx 0,969$.

(a) Obsz. kryt. $K = \langle 0; 0,906\rangle$. **(b)** Obsz. kryt. $K = \langle 0; 0,887\rangle$.

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że cecha X ma rozkład normalny.

II etap

$H_0: \mu = 480$, $H_1: \mu \neq 480$, $\bar{x} = 448,25$, $u \approx -1,81$.

(a) Obsz. kryt.: $K = (-\infty; -1,64\rangle \cup \langle 1,64; +\infty)$. H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1.

(b) Obsz. kryt.: $K = (-\infty; -1,96\rangle \cup \langle 1,96; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

7.6 Wartość stat. test. $t \approx 1,54$. Obsz. kryt.: $K = (-\infty; -2,06\rangle \cup \langle 2,06; +\infty)$.

Nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

7.7 Wartość stat. test. $t \approx 3,33$. Obsz. kryt.: $K = \langle 2,60; +\infty)$.

H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1.

7.8 I etap Sprawdzenie zgodności z rozkładem normalnym: $s \approx 0,84$. Wartość stat. test. $w \approx 0,928$. Obsz. kryt. $K = \langle 0; 0,838\rangle$.

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że cecha X ma rozkład normalny.

II etap

$H_0: \mu = 3$, $H_1: \mu \neq 3$, $\bar{x} \approx 2,53$, $s \approx 0,84$. Wartość stat. test. $t \approx -1,48$.

Obsz. kryt.: $K = (-\infty; -1,94\rangle \cup \langle 1,94; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

7.9 I etap Sprawdzenie zgodności z rozkładem normalnym: $s \approx 0,0355$. Wartość stat. test. $w \approx 0,894$. Obsz. kryt. $K = \langle 0; 0,818\rangle$.

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że cecha X ma rozkład normalny.

II etap

$H_0: \mu = 7,25$, $H_1: \mu \neq 7,25$; $\bar{x} \approx 7,271$, $s \approx 0,027$.

Wartość stat. test. $t \approx 2,20$. Obsz. kryt.: $K = (-\infty; -2,36\rangle \cup \langle 2,36; +\infty)$.

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0, tzn., że całkowite stężenie protein pacjenta przechodzącego serię testów nie różni się istotnie od normy.

7.10 I etap Sprawdzenie zgodności z rozkładem normalnym: $s \approx 2,36$. Wartość stat. test. $w \approx 0,955$. Obsz. kryt. $K = \langle 0; 0,781\rangle$.

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że cecha X ma rozkład normalny

II etap

$\bar{x} \approx 80{,}7$. Wartość stat. test. $t \approx -3{,}08$.

(a) Obsz. kryt.: $K = \left(-\infty\,; -3{,}25\right\rangle \cup \left\langle 3{,}25\,; +\infty\right)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .

(b) Obsz. kryt.: $K = (-\infty\,; -2{,}82\rangle$. H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1 .

7.11 Wartość stat. test. $z = 1{,}8$.

(a) Obsz. kryt.: $K = \langle 2{,}33\,; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .

(b) Obsz. kryt.: $K = \langle 1{,}64\,; +\infty)$. H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1 .

(c) Obsz. kryt.: $K = \langle 1{,}28\,; +\infty)$. H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1 .

7.12 $H_0: \mu = 120$, $H_1: \mu \neq 120$, $\bar{x} \approx 117{,}33$, $s \approx 14{,}74$. Wartość stat. test. $z \approx -1{,}40$.

Obsz. kryt.: $K = \left(-\infty\,; -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96\,; +\infty\right)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .

7.13 $\bar{x} = 66{,}9$, $s \approx 6{,}82$. Wartość stat. test. $z \approx 7{,}18$.

Obsz. kryt.: $K = \langle 1{,}64\,; +\infty)$. H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1 .

7.14 $H_0: \mu = 170$, $H_1: \mu \neq 170$, $\bar{x} = 166$, $s \approx 5{,}81$.

Wartość stat. test. $z \approx -6{,}88$. Obsz. kryt.: $K = \left(-\infty\,; -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96\,; +\infty\right)$.

Wartość przeciętna wzrostu mężczyzn w badanej populacji jest istotnie różna od 170 cm.

7.15 $H_0: \sigma^2 = 0{,}08$, $H_1: \sigma^2 > 0{,}08$. Wartość stat. test.: $y \approx 15{,}75$.

(a) Obsz. kryt.: $K = \langle 21{,}67\,; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

(b) Obsz. kryt.: $K = \langle 16{,}92\,; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

(c) Obsz. kryt.: $K = \langle 14{,}68\,; +\infty)$. Hipotezę H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1 .

7.16 $H_0: \sigma^2 = 10$, $H_1: \sigma^2 \neq 10$. Wartość stat. test.: $y \approx 4{,}6$.

(a) Obsz. kryt.: $K = (0\,; 0{,}99\rangle \cup \langle 20{,}28\,; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .

(b) Obsz. kryt.: $K = (0\,; 1{,}69\rangle \cup \langle 16{,}01\,; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .

(c) Obsz. kryt.: $K = (0\,; 2{,}17\rangle \cup \langle 14{,}07\,; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .

7.17 $H_0: \sigma^2 = 0{,}02^2$, $H_1: \sigma^2 > 0{,}02^2$. Wartość stat. test.: $y \approx 12{,}1$.

Obsz. kryt.: $K = \langle 24{,}73\,; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia twierdzeń producenta.

7.18 $H_0: \sigma = 5$, $H_1: \sigma > 5$. Wartość stat. test.: $y \approx 13{,}23$.

(a) Obsz. kryt.: $K = \langle 19{,}68\,; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

(b) Obsz. kryt.: $K = \langle 17{,}28\,; +\infty)$. Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

7.19 $H_0: \sigma^2 = 5$, $H_1: \sigma^2 > 5$. $s \approx 2{,}52$. Wartość stat. test.: $z \approx 1{,}80$.

Obsz. kryt.: $K = \langle 1{,}64\,;+\infty)$. H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1.

7.20 $H_0: \ \sigma^2 = 25$, $H_1: \ \sigma^2 \neq 25$. $s \approx 5{,}81$. Wartość stat. test.: $z \approx 2{,}29$.

(a) Obsz. kryt.: $K = \left(-\infty\,; -2{,}58\right\rangle \cup \left\langle 2{,}58\,; +\infty\right)$. Nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

(b) Obsz. kryt.: $K = \left(-\infty\,; -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96\,; +\infty\right)$. H_0 należy odrzucić i przyjąć H_1

8. WERYFIKACJA HIPOTEZ DLA DWÓCH ZMIENNYCH ZALEŻNYCH

8.1 W badaniach nad skutecznością nowego leku w obniżaniu ciśnienia tętniczego krwi, wybrano losowo 7 pacjentów, którym podawano testowany lek przez okres 2 tygodni. Zmierzono ciśnienie każdemu z pacjentów przed podaniem leku i po zakończeniu leczenia. Otrzymano następujące wyniki:

Pacjent	Przed leczeniem	Po leczeniu
1	210	180
2	180	160
3	260	220
4	270	260
5	190	200
6	250	230
7	180	180

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować twierdzenie producenta nowego leku, że lek ten powoduje spadek przeciętnej wartości ciśnienia tętniczego krwi.

8.2 Awitaminoza B_{12} zwana też anemią (niedokrwistością) złośliwą jest spowodowana upośledzoną absorpcją witaminy B_{12}. Jednym z objawów anemii jest zmniejszenie zawartości hemoglobiny w jednostce objętości krwi. Prawidłowe stężenie hemoglobiny we krwi człowieka wynosi 150 – 160 g/l . W badaniach nad skutecznością leczenia anemii złośliwej witaminą B_{12} wybrano losowo 6 pacjentów chorych na tę chorobę. Zmierzono stężenia hemoglobiny we krwi tych chorych przed leczeniem i po zakończeniu leczenia witaminą B_{12}. Otrzymano następujące wyniki:

Pacjent	Przed leczeniem	Po leczeniu
1	122	130
2	113	134
3	147	160
4	114	136
5	115	140
6	127	138

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ sprawdzić, czy leczenie anemii złośliwej witaminą B_{12} było skuteczne. Wartości stężenia hemoglobiny podlegają rozkładowi normalnemu.

8.3 Losowo wybranych 8 kobiet stosowało, przez okres 1 miesiąca, nową dietę odchudzającą. Wagę, biorących udział w eksperymencie, kobiet podaje poniższa tabelka.

Numer kobiety	1	2	3	4	5	6	7	8
Waga przed dietą	57,6	58,9	51,7	63,0	68,0	66,6	75,7	69,3
Waga po diecie	55,2	54,4	56,6	59,8	65,3	62,5	78,3	68,9

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zbadać skuteczność nowej diety. Zakładamy, że rozkład wagi ciała jest rozkładem normalnym.

8.4 12 osób uczestniczyło w eksperymencie polegającym na zbadaniu, czy pewna dieta połączona z programem ćwiczeń fizycznych powoduje spadek stężenia cholesterolu. Poniższa tabelka podaje stężenie cholesterolu przed i po zakończeniu eksperymentu.

STĘŻENIE CHOLESTEROLU

Numer osoby	**Przed eksperymentem**	**Po eksperymencie**
1	201	200
2	231	236
3	221	216
4	260	233
5	228	224
6	237	216
7	326	296
8	235	195
9	240	207
10	267	247
11	284	210
12	201	209

Czy dane potwierdzają hipotezę, że dieta połączona z programem ćwiczeń fizycznych powoduje obniżenie stężenia cholesterolu. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

8.5 W badaniach nad szkodliwością palenia papierosów dla płodu ludzkiego zmierzono procentową zawartość hemoglobiny tlenko–węglowej we krwi 10 ciężarnych kobiet przed i po wypaleniu papierosa. Otrzymano następujące wyniki

<u>**ZAWARTOŚĆ HEMOGLOBINY**</u>

Numer kobiety	**Przed**	**Po**
1	1,2	7,6
2	1,4	4,0
3	1,5	5,0
4	2,4	6,3
5	3,6	5,6
6	0,5	6,0
7	2,0	6,4
8	1,5	5,0
9	1,0	4,2
10	1,7	5,2

Zbadać czy wzrost procentowej zawartości hemoglobiny, po wypaleniu papierosa, jest statystycznie istotny. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0{,}01$. Procentowa zawartość hemoglobiny tlenko–węglowej we krwi podlega rozkładowi normalnemu.

8.6 W badaniach nad możliwymi uszkodzeniami mózgu z powodu alkoholizmu analizowano, za pomocą tomografii komputerowej, gęstości mózgu u 11 chronicznych alkoholików. Dla każdego z tych alkoholików wyselekcjonowano osobę (kontrolną), nie pijącą, o tym samym wieku, płci, wykształceniu i innych cechach, tzn. wyselekcjonowano grupę kontrolną 11 osób przy czym sposób selekcji uzasadnia traktowanie obu grup: alkoholików i kontrolnej jako **prób zależnych**. Miary gęstości mózgów w obu grupach podaje poniższa tabelka.

Numer pary	**Grupa alkoholików**	**Grupa kontrolna**
1	40,1	41,3
2	38,5	40,2
3	36,9	37,4
4	41,4	43,1
5	40,6	43,9
6	42,3	41,9
7	37,2	39,9
8	38,6	40,4
9	38,5	38,6
10	38,4	38,1
11	38,1	39,5

Zakładając, że miary gęstości mózgów podlegają rozkładowi normalnemu, zweryfikować hipotezę, że nadużywanie alkoholu wpływa w istotny sposób na rozmiękczanie mózgu. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

8.7 Zmierzono czas reakcji na pewien bodziec u 8 kierowców badanych w pracowni psychotechnicznej przed i w 15 minut po wypiciu 100 g 45% alkoholu. Czasy reakcji, w sekundach, podane są w tabelce.

Numer kierowcy	**Przed wypiciem alkoholu**	**Po wypiciu alkoholu**
1	0,28	0,28
2	0,18	0,25
3	0,16	0,20
4	0,19	0,30
5	0,20	0,19
6	0,23	0,26
7	0,17	0,28
8	0,25	0,24

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że alkohol zwiększa czas reakcji na bodziec. Czasy reakcji podlegają rozkładom normalnym.

8.1 I etap Sprawdzenie zgodności z rozkładem normalnym: $s_D \approx 17{,}18$. Wartość stat. test. $w \approx 0{,}980$. Obsz. kryt. $K = \langle 0; 0{,}803 \rangle$.

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że cecha X ma rozkład normalny

II etap $H_0 : \mu_D = 0$, $H_1 : \mu_D > 0$.

Wartość stat. test.: $t \approx 2{,}42$, ($\bar{d} \approx 15{,}71$, $s_D \approx 17{,}18$).

Obsz. kryt.: $K = \langle 1{,}94 ; +\infty)$. Hipotezę zerową H_0 należy odrzucić i przyjąć hipotezę alternatywną H_1 . Nowy lek powoduje spadek przeciętnej wartości ciśnienia tętniczego krwi.

8.2 $H_0 : \mu_D = 0$, $H_1 : \mu_D < 0$.

Wartość stat. test.: $t \approx -5{,}93$, ($\bar{d} \approx -16{,}67$, $s_D \approx 6{,}89$).

Obsz. kryt.: $K = (-\infty ; -2{,}02\rangle$. H_0 należy odrzucić i przyjąć hipotezę H_1 .

Leczenie anemii złośliwej witaminą B_{12} było skuteczne.

8.3 $H_0 : \mu_D = 0$, $H_1 : \mu_D > 0$. Wartość stat. test.: $t \approx 1{,}03$, ($\bar{d} = 1{,}225$, $s_D \approx 3{,}365$).

Obsz. kryt.: $K = \langle 1{,}89 ; +\infty)$. Nie ma podstaw do twierdzeń, że nowa dieta jest skuteczna.

8.4 I etap Sprawdzenie zgodności z rozkładem normalnym: $s_D \approx 23{,}13$. Wartość stat. test. $w \approx 0{,}919$. Obsz. kryt. $K = \langle 0; 0{,}859 \rangle$

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że cecha X ma rozkład normalny

II etap $H_0 : \mu_D = 0$, $H_1 : \mu_D > 0$ .Wartość stat. test.: $t \approx 3{,}02$, ($\bar{d} \approx 20{,}17$, $s_D \approx 23{,}13$).

Obsz. kryt.: $K = \langle 1{,}80 ; +\infty)$. Stosowanie diety połączonej z programem ćwiczeń fizycznych powoduje obniżenie stężenia cholesterolu.

8.5 $H_0 : \mu_D = 0$, $H_1 : \mu_D < 0$. Wartość stat. test.: $t \approx -9{,}37$, ($\bar{d} = 3{,}85$, $s_D \approx 1{,}30$).

Obsz. kryt.: $K = (-\infty ; -2{,}82\rangle$. Wzrost procentu hemoglobiny tlenko-węglowej jest statystycznie znaczący.

8.6 $H_0 : \mu_D = 0$, $H_1 : \mu_D < 0$ .Wartość stat. test.: $t = -3{,}48$, ($\bar{d} \approx -1{,}25$, $s_D \approx 1{,}19$).

Obsz. kryt.: $K = (-\infty ; -2{,}76\rangle$. Nadużywanie alkoholu wpływa w istotny sposób na rozmiękczanie mózgu.

8.7 $H_0 : \mu_D = 0$, $H_1 : \mu_D < 0$ .Wartość stat. test.: $t \approx -2{,}4$, ($\bar{d} = -0{,}0425$, $s_D \approx 0{,}05$).

Obsz. kryt.: $K = (-\infty ; -1{,}89\rangle$. Spożywanie alkoholu zwiększa czas reakcji na bodziec.

9. REGRESJA LINIOWA I KORELACJI

9.1 Dane są punkty: (5, 3), (3, 8), (4, 4), (1, 11), (2, 9).

(a) Wyznaczyć prostą $y = b_0 + b_1 x$ dla której wyrażenie $q = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(b_0 + b_1 x_i \right) \right]^2$ osiąga wartość najmniejszą (metoda najmniejszych kwadratów).

(b) Naszkicować dane punkty i wyznaczoną prostą na tym samym rysunku.

(c) Sprawdź założenie normalności reszt;

(d) Przeanalizuj wykres rozrzutu reszt względem wartości przewidywanych.

9.2 Dane są punkty: (3 , 2), (5 , 3), (6 , 4), (8 , 6), (9 , 5), (11 , 8).

(a) Wyznaczyć prostą $y = b_0 + b_1 x$ najlepiej dopasowaną do danych punktów w sensie metody najmniejszych kwadratów.

(b) Sporządzić wykres danych punktów i wyznaczonej prostej na tym samym rysunku.

9.3 Dane są następujące obserwacje zmiennej losowej zależnej Y i zmiennej losowej niezależnej X

x	1,0	1,0	1,5	2,0	2,0	2,5	3,0	3,0	3,0	3,6	4,0	4,2
y	3,2	3,4	4,2	4,2	5,0	5,4	6,5	6,8	7,2	8,8	9,2	9,5

(a) Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć prostą najlepiej dopasowaną do danych.

(b) Sporządzić wykres rozproszenia punktów (x_i, y_i) oraz wyznaczonej prostej na tym samym rysunku.

9.4 W pewnym doświadczeniu farmakologicznym bada się wpływ leku hipotensyjnego na ciśnienie tętnicze krwi zwierząt doświadczalnych. Podano 10 różnej wielkości dawek (w mg/kg wagi ciała) tego leku – cecha X, i otrzymano następujące spadki ciśnienia tętniczego krwi (w mm Hg) – cecha Y

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	15	5	15	35	25	30	55	65	65	55

(a) Wyznaczyć prostą regresji Y względem X.

(b) Sporządzić wykres rozproszenia punktów (x_i, y_i) oraz prostej regresji na tym samym rysunku.

(c) Określić procent zaobserwowanej zmienności Y wyjaśnionej jej zależnością liniową względem zmiennej X.

(d) Przeanalizuj wykres rozrzutu reszt względem wartości przewidywanych.

9.5 Dla próby losowej 12 kobiet (z pewnej populacji) wyznaczono obserwacje cechy X – wieku i cechy Y – ciśnienia skurczowego krwi. Wyniki podane są w tabelce:

x	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
y	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	155

(a) Wyznaczyć prostą regresji Y względem X.

(c) Podać prognozę wartości ciśnienia krwi dla kobiety w wieku 45 lat.

9.6 W pewnej grupie zwierząt doświadczalnych obserwowano wzrost procentu zarażonych pewną chorobą zwierząt (Y) na przestrzeni tygodnia (X) i otrzymano następujące wyniki:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	3	5	7	10	14	26

Wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów wykładniczą funkcję regresji $y = k \cdot e^{-mx}$ procentu zarażonych zwierząt względem czasu. Sporządź wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $lny = f(x)$.

9.7 W pewnym doświadczeniu farmakologicznym zbadano wpływ pewnego preparatu, podawanego w różnych dawkach ($X[mg]$) doświadczalnym gołębiom, na wzrost ciężaru wola ($Y[g]$) tych gołębi. Otrzymano następujące wyniki:

x	10	20	40	60	70	80	100
y	2,5	4,2	6,3	6,9	7,2	7,7	8,0

Oszacować metodą najmniejszych kwadratów parametry logarytmicznej funkcji regresji $y = klnx + m$ ciężaru wola względem wielkości dawki podawanego preparatu. Sporządź wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = f(lnx)$.

9.8 W pewnym doświadczeniu fizycznym bada się w pewnych warunkach kąt obrotu wektora namagnesowania (Y) pewnej próbki w zależności od wielkości ziaren tej próbki (X). Z pomiarów otrzymano następujące dane liczbowe:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	8,0	5,5	3,5	3,3	2,5	2,2	1,7	1,5

Wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów hiperboliczną funkcję regresji $y = \frac{k}{x} + m$ kąta obrotu wektora namagnesowania względem wielkości ziaren namagnesowanej próbki. Sporządź wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

9.9 W pewnym doświadczeniu chemicznym dokonano 8 pomiarów szybkości rozpuszczania się powłoki srebrnej (Y) w różnych temperaturach roztworu (X). Otrzymano następujące wyniki:

x	14	15	16	18	20	21	22	24
y	0,31	0,35	0,36	0,39	0,40	0,42	0,43	0,44

Wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów potęgową funkcję regresji $y = mx^k$ szybkości rozpuszczania się powłoki srebrnej względem temperatury. Sporządź wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $lny = f(lnx)$.

9.10 Dane są następujące wartości zmiennych losowych X i Y:

x	2,0	2,1	2,5	3,0	3,5	3,9	4,0
y	4,0	4,4	6,3	9,0	6,2	4,3	4,0

(a) Naszkicować diagram korelacyjny.

(b) Wyznaczyć współczynnik korelacji liniowej.

9.11 Spośród studentów pewnego wydziału uczelni wybrano losowo 10 studentów IV roku, a następnie wyznaczono następujące średnie oceny, które uzyskali w sesji egzaminacyjnej na I roku studiów – cecha X, oraz na IV roku – cecha Y:

x	3,5	4,0	3,8	4,6	3,9	3,0	3,5	3,9	4,5	4,1
y	4,2	3,9	3,8	4,5	4,2	3,4	3,8	3,9	4,6	4,0

(a) Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że istnieje korelacja między wynikami studiów uzyskiwanymi przez studentów tego wydziału na I i IV roku.

(b) Zweryfikować hipotezę H_0 : $\rho = 0{,}6$ wobec hipotezy H_1 : $\rho > 0{,}6$. Poziom istotności $\alpha = 0{,}05$

9.12 W badaniach nad chorobami serca mierzono wagę ciała (w kg) – zmienna losowa *X*, i stężenie cholesterolu (w mg/dl) – zmienna losowa *Y*, u 12 zdrowych mężczyzn. Otrzymano następujące wyniki

Waga	84	88	79	77	107	130	90	71	69	93	81	82
Stężenie cholesterolu	130	390	315	310	208	274	300	294	395	256	366	260

Czy dane te uzasadniają wniosek, że badane zmienne losowe *X*, *Y* są niezależne ? Sformułować odpowiednie hipotezy i zweryfikować je na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$. Zmienne losowe *X*, *Y* podlegają dwuwymiarowemu rozkładowi normalnemu.

9.13 Badano puls – zmienna losowa *X*, i skurczowe (systoliczne) ciśnienie krwi – zmienna losowa *Y*, u 16 dorosłych osób. Otrzymano następujące wyniki

x	*y*	*x*	*y*
70	112	58	117
74	126	90	132
62	114	73	120
80	138	72	130
80	126	61	112
70	110	88	121
89	142	93	140
72	120	77	128

Wysunięto przypuszczenie, że wielkość skurczowego ciśnienia krwi jest niezależna od wielkości pulsu. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować odpowiednie hipotezy statystyczne. Zmienne losowe *X*, *Y* podlegają dwuwymiarowemu rozkładowi normalnemu.

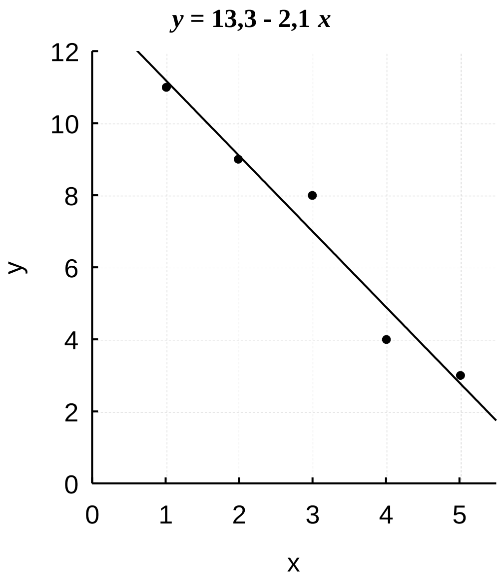
**Zadania 9.6-9.9 pochodzą ze *Zbioru zadań ze statystyki medycznej* Antoniego Lemańczyk

9.1 **(a)** $y = 13{,}3 - 2{,}1x$, **(b)** Rys. 11

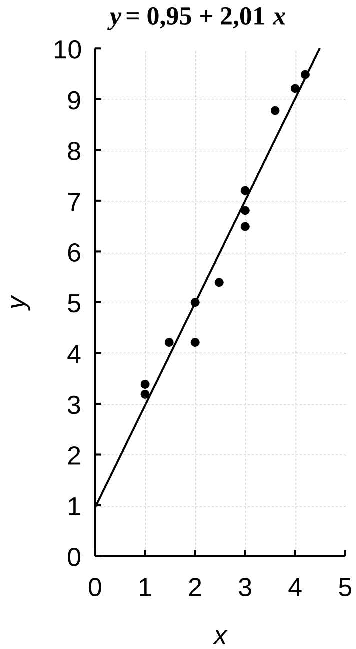
9.2 **(a)** $y = -0{,}33 + 0{,}71x$, **(b)** Rys. 12

9.3 **(a)** $y = 0{,}95 + 2{,}01x$, **(b)** Rys. 13

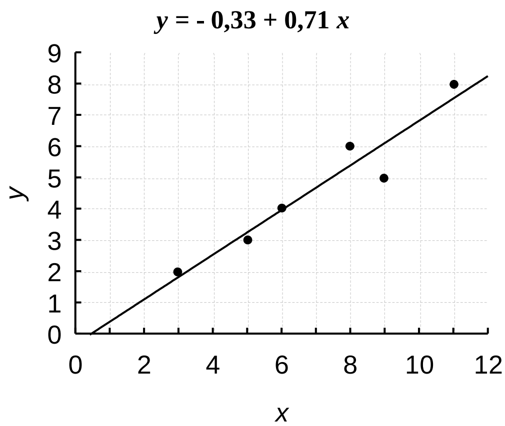
9.4 **(a)** $y = 66{,}36x$, $(\bar{x} = 0{,}55,\ \bar{y} \approx 36{,}5)$, **(b)** Rys. 14, **(c)** 82,5%



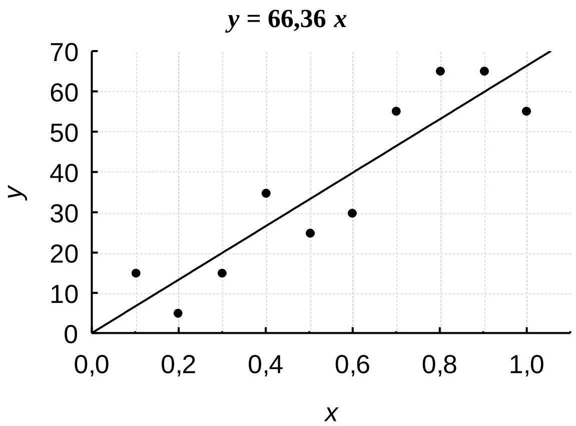
Rys. 11



Rys. 13



Rys. 12



Rys. 14

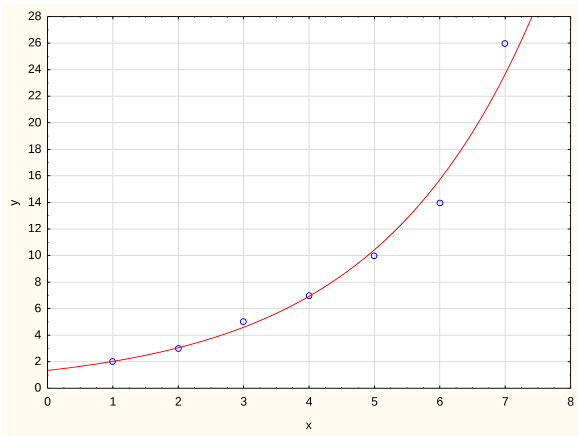
9.5 **(a)** $y = 80{,}78 + 1{,}14x$, **(b)** 132

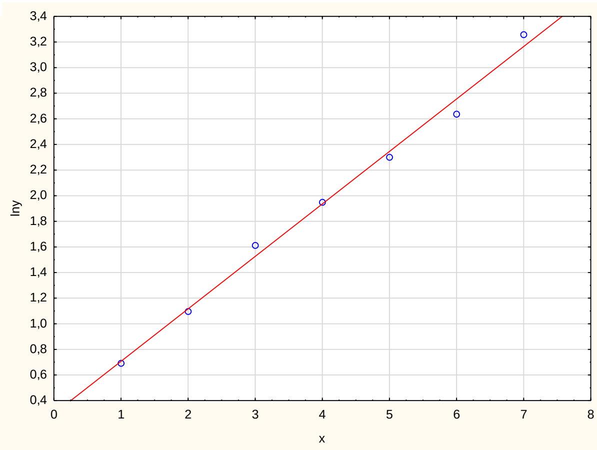
9.6 $y = 1{,}35e^{0{,}41x}$, rys. 15 i 16

9.7 $y = 2{,}42 \cdot lnx - 2{,}99$, rys. 17 i 18

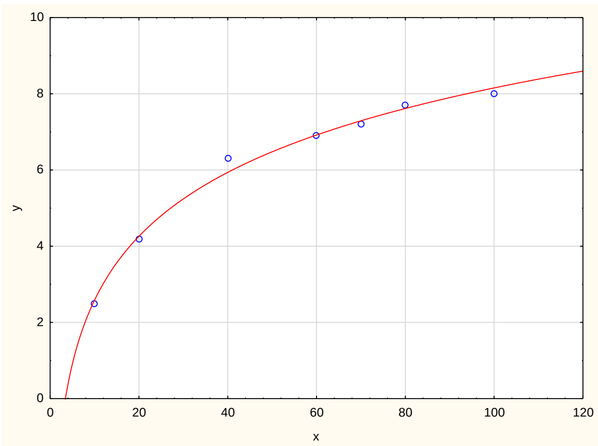
9.8 $y = \frac{73{,}8}{x} + 1{,}02$, rys. 19 i 20

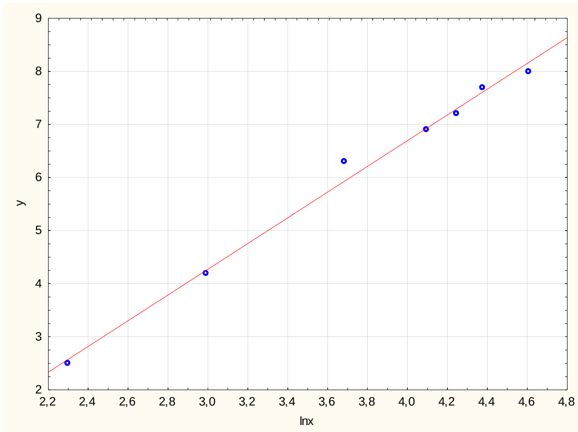
9.9 $y = 0{,}07 \cdot x^{0{,}6}$, rys. 21 i 22



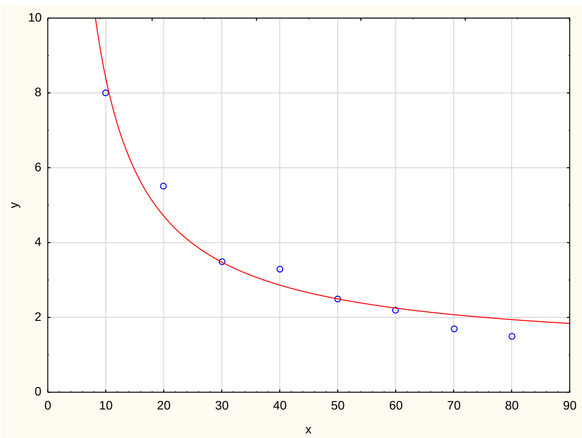


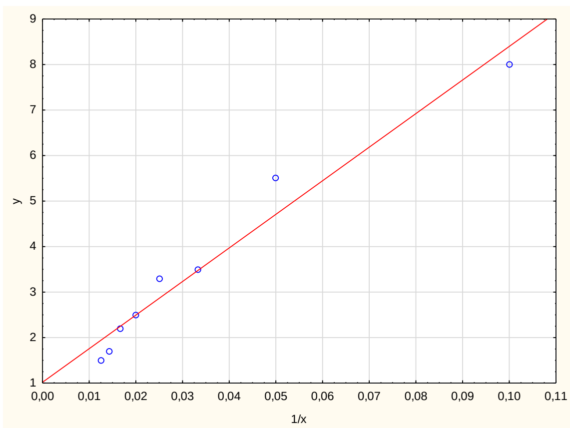
Rys. 15 Rys. 16



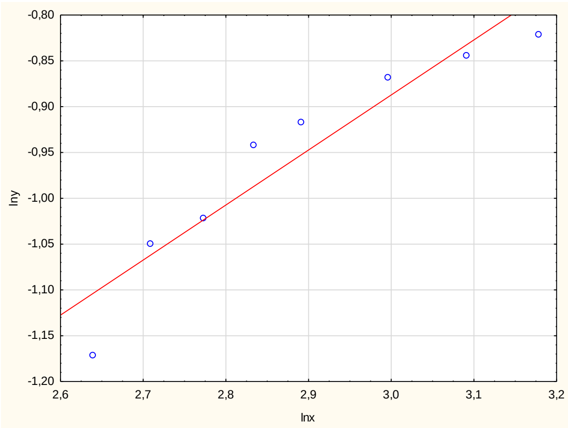


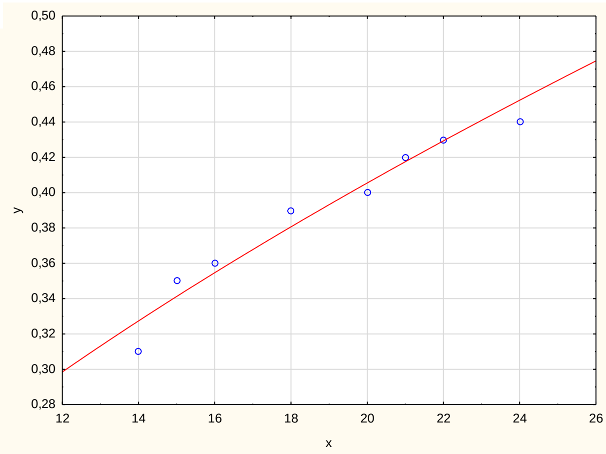
Rys. 17 Rys. 18



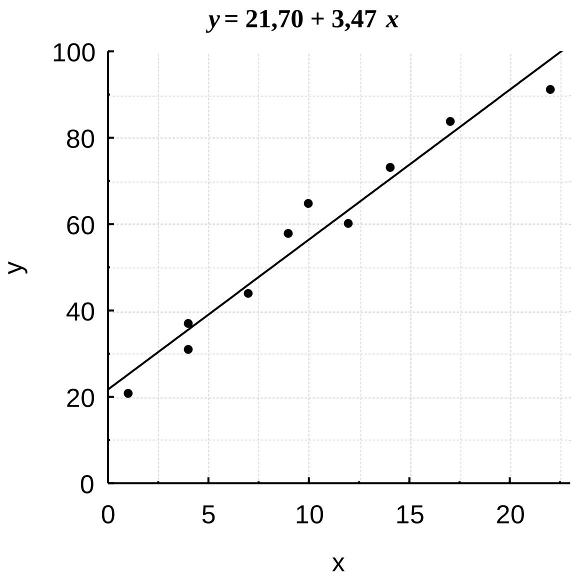


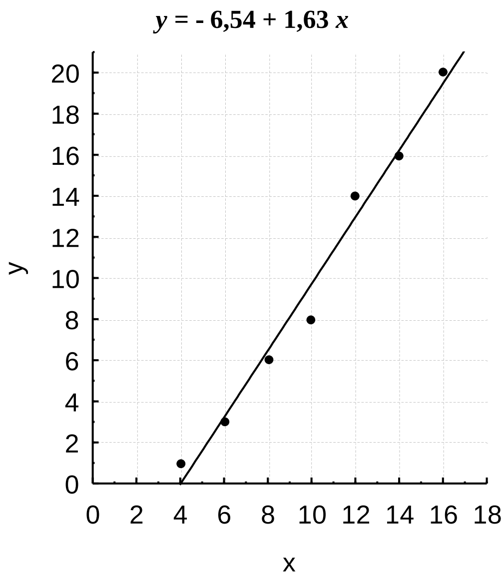
Rys. 19 rys. 20





Rys. 22 Rys. 21





Rys. 15

9.10 **(a)** Rys. 17, **(b)** $r \approx -0{,}015$

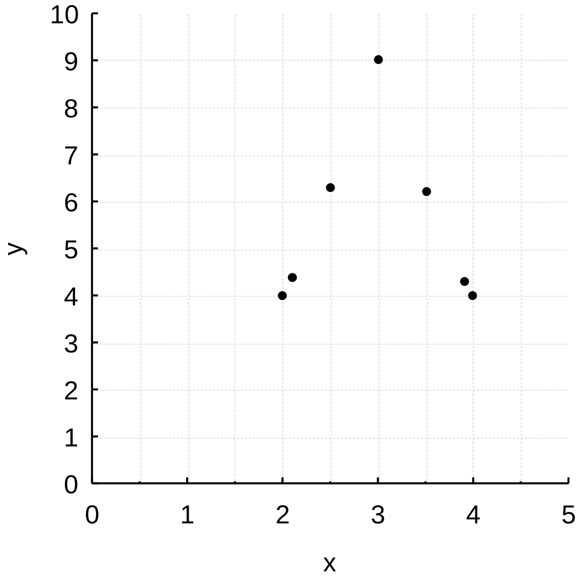
9.11 **(a)** $H_0 : \rho = 0$, $H_1 : \rho \neq 0$, $r \approx 0{,}83$.

Wartość stat. test.: $t \approx 4{,}21$.

Obsz. kryt.:

$K = \left(-\infty; -2{,}31\right\rangle \cup \left\langle 2{,}31; +\infty\right)$.

Hipotezę H_0 należy odrzucić i przyjąć hipotezę H_1, tzn., że istnieje korelacja między wynikami studiów na I i IV roku.



Rys. 17

9.11 **(b)** Wartość stat. test.: $z \approx 1{,}32$. Obsz. kryt.: $K = \left\langle 1{,}64; +\infty\right)$.

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

9.12 $H_0 : \rho = 0$, $H_1 : \rho \neq 0$, $r \approx -0{,}3119$. Wartość stat. test.: $t \approx -1{,}14$.

Obsz. kryt.: $K = \left(-\infty; -2{,}18\right\rangle \cup \left\langle 2{,}18; +\infty\right)$. Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0, tzn., że nie ma podstaw do odrzucenia przypuszczenia, że wielkość wagi ciała jest niezależna od stężenia cholesterolu u zdrowych mężczyzn.

9.13 $H_0 : \rho = 0$, $H_1 : \rho \neq 0$, $r \approx 0{,}73$. Wartość stat. test.: $t \approx 4{,}50$.

Obsz. kryt.: $K = \left(-\infty; -2{,}14\right\rangle \cup \left\langle 2{,}14; +\infty\right)$. Hipotezę H_0 należy odrzucić i przyjąć hipotezę H_1, tzn., że wielkość skurczowego ciśnienia krwi zależy od wielkości pulsu.